

A regra da cadeia

1 Funções compostas

Às vezes precisamos pegar dois transportes pra chegar a algum lugar. Metrô seguido de ônibus, ônibus seguido de ônibus. Às vezes pegamos uma carona de carro com alguém até o ponto de ônibus e outras variações. Usando funções $f(x)$ e $g(x)$, suponha que $g(x)$ seja um transporte que nos leva a algum lugar. Partimos de casa em $x = c$ e g nos leva a $g(c)$. Chegando a $g(c)$, pegamos o transporte f que nos leva de $g(c)$ até $f(g(c))$. Matemáticos diriam “ f composta com g ”.

Definição. A composição das funções $I \rightarrow U: f(x)$ e $C \rightarrow I: g(x)$ é escrita

$$C \rightarrow U : (f \circ g) = f(g(x)).$$

Experimente. Note que embora se escreva $f \circ g$, a primeira função a ser aplicada a x é a função g . Se pego o ônibus A e depois o ônibus B pra ir à universidade, então a composição que pego é $B \circ A$.

Investigue. Se o ônibus B me leva até o ponto p e o ônibus A não passa em p , não dá pra compor esses dois. A imagem de g tem que coincidir com o domínio de f , necessariamente. (Não existe função mal-definida. Toda função tem que estar perfeitamente bem-definida.)

Exemplo. Um exemplo de função composta é $F(x) = \sin(x^2 + 2x)$. Como vamos calcular a derivada dessa função com as regras que aprendemos até agora? Não conseguiríamos. Precisamos da regra da cadeia.

2 A regra da cadeia

A regra diz que a derivada de uma função composta $f(g(x))$ é o produto das derivadas de f e g , assumindo que g seja diferenciável em x e que f seja diferenciável em $g(x)$.

Esse fato é uma das mais importantes regras de derivação, chamada Regra da Cadeia. – James Stewart, seção 3.4.

Em símbolos, se $y(x) = f(g(x))$, então

$$y'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Por exemplo, a derivada de $y(x) = \sin(x^2 + 2x)$ é $y'(x) = \cos(x^2 + 2x)(2x + 2)$. Vejamos tudo de novo na notação de Leibniz.

3 A regra da cadeia na notação de Leibniz

É muito frequente a expressão da regra da cadeia usando a notação de derivadas criada por Gottfried Leibniz. Em vez de escrever $f'(x) = 2x$, Leibniz escreveria

$$\frac{dy}{dx} = 2x,$$

como se a derivada fosse um quociente. Retornemos ao exemplo da função $y(x) = \sin(x^2 + 2x)$ pra que possamos ilustrar a notação de Leibniz e a regra da cadeia. Façamos uma substituição de variáveis em $y(x)$. Seja $u(x) = x^2 + 2x$, o que nos permite escrever a função y como $y(u) = \sin(u)$ — mas lembre-se que y ainda é a mesma função de antes, já que $y(x) = \sin(u(x))$. De acordo com a regra da cadeia, a derivada da composição $y(x)$ é o produto das compostas e, portanto, na notação de Leibniz, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx},$$

uma notação que sugere que se as derivadas fossem quocientes, poderíamos cancelar du em ambos, tornado a regra da cadeia uma regra de demonstração trivial.

Exercício 3.1. Compute a derivada de $y = \sin(4x)$ e também de $y = (1 - x^2)^{10}$ usando a notação de Leibniz.

Exercício 3.2. A regra da cadeia pode ser combinada com qualquer outra regra de derivação que já estudamos. (Aliás, já usamos ela combinada com as regras de derivação das funções trigonométricas.) Experimente combinar a regra da cadeia com alguma outra. Compute a derivada de

$$y = \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^3$$

com respeito a x .

4 A derivada da exponencial a^x , sendo $a > 0$

Lembra que quando computamos a derivada da exponencial $f(x) = a^x$, sendo $a > 0$, terminamos por concluir que ela seria

$$f'(x) = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = f'(0)a^x$$

e ficamos impossibilitados de descobrir quem seria $f'(0)$? Tudo que sabíamos era que

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Com a regra da cadeia, podemos encontrar esse limite. Expresse a^x usando e^x e sua inversa, $\ln x$. Em símbolos, escreva

$$a^x = e^{\ln(a^x)} = \exp(\ln a^x) = \exp(x \ln a),$$

observando que $\exp(x \ln a)$ é a composição das funções $y(u) = \exp(u)$ e $u(x) = x \ln a$, sendo $a > 0$ um número real. Daí, usando a regra cadeia pra computar a derivada dessa composição, obtemos

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}e^{x \ln a} = (\ln a)e^{x \ln a} = (\ln a)e^{(\ln a)x} = (\ln a)\exp(\ln(a^x)) = (\ln a)a^x,$$

completando a derivada da exponencial de qualquer base.

5 Limites notáveis

Talvez seja importante coletarmos uma listinha de limites notáveis. Na aula passada, vimos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1. \quad (1)$$

Nossa intuição sobre esse limite é que $\sin h \approx h$ quando h está próximo de zero. Essa intuição também nos permite afirmar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\sin(h)} = 1.$$

Vimos também que, usando o limite (1), conseguimos provar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0$$

E agora com a regra da cadeia obtivemos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a,$$

sendo $a > 0$.

Exercício 5.1. Compute

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}.$$

Exercício 5.2. Compute

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan 6t}{\sin 2t}.$$