

Continuidade

1 Limites

Em aulas anteriores, definimos que se

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

sem ser necessário que $f(a)$ seja igual a L ou sequer que o valor $f(a)$ esteja definido.

Pra encontrar o limite de uma função como

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1},$$

argumentamos que a função $g(x) = x + 1$ é exatamente igual a $f(x)$ exceto no ponto $x = 1$. Como o ponto $x = 1$ é irrelevante para o limite de $f(x)$ com $x \rightarrow 1$, não precisamos saber que valor f teria em $x = 1$ e, assim, observamos o que acontece com $g(x)$ à medida que $x \rightarrow 1$: sabemos que $g(1)$ reflete exatamente o que ocorre com $f(x)$ à medida que $x \rightarrow 1$. Mais ainda, como $g(x)$ é definida no ponto $x = 1$, obtemos $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ simplesmente por calcular $g(1)$.

Essa estratégia funciona porque $g(x) = x + 1$ é uma função *contínua* em $x = 1$. Ser contínua significa que dois números do domínio de g que estejam “próximos”, como x e $x + 0.01$, são associados (por g) a dois números “próximos”, que são $g(x) = x + 1$ e $g(x + 0.01) = x + 1.01$.

2 Continuidade

Definição. Uma função $f(x)$ é contínua em um número $x = a$ se

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

Observe. A definição exige três coisas pra que f seja contínua em $x = a$. São elas:

1. o valor $f(a)$ tem que estar definido

2. o limite tem que existir
3. o limite tem que ser igual a $f(a)$.

Visualize. A definição implica que f é contínua em a se o valor $f(a)$ é coerente com os limites laterais de $f(x)$ à medida que $x \rightarrow a$. Se $f(a)$ é diferente (mesmo que só um pouquinho diferente) dos limites laterais, o que se observa no gráfico é uma ruptura do desenho da função — isto é, uma descontinuidade. A Figura 1 apresenta uma descontinuidade (removível) em $x = a$. O “problema” nessa figura é que os limites laterais tendem à altura A , mas $f(a) = B$.

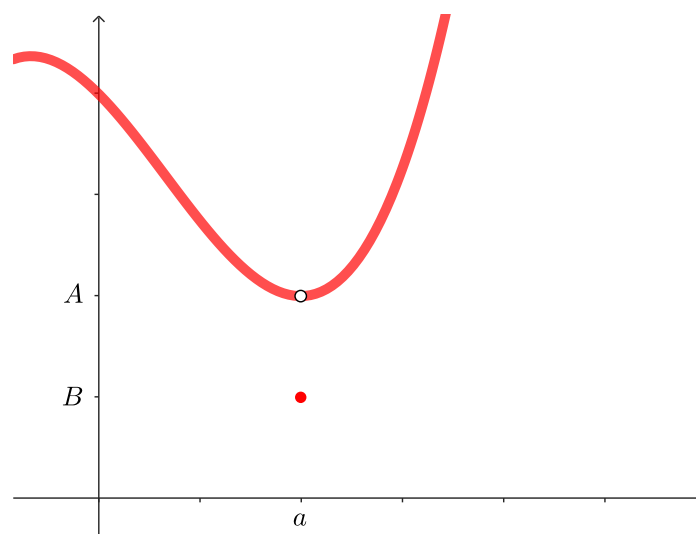


Figura 1: Uma descontinuidade removível em $x = a$.

Terminologia nova em negrito. “Muito pior” (digamos assim) é a situação da função $h(x) = 1/(x-1)$ em $x = 1$. A função é indefinida em $x = 1$ porque temos uma divisão por zero lá, mas mesmo que arbitrariamente definíssemos $f(1)$, ainda assim seria impossível conciliar os limites laterais (inexistentes). A descontinuidade exibida pela função da Figura 1 é chamada de **descontinuidade removível**: é possível removê-la por tornar a função contínua lá — por exemplo, defina que $f(a) = A$. Já a descontinuidade em $x = 1$ da função $1/(x-1)$ é chamada de **descontinuidade infinita**. (**Descontinuidade em saltos** é o nome que se dá à descontinuidade da função ilustrada pela Figura 2.)

Intuição. Intuitivamente, pensa-se que uma função é contínua quando é possível desenhá-la sem levantar a caneta do papel.

Continuidade lateral

Assim como os limites, continuidade também pode ser lateral.

Definição. Uma função é contínua em a pela esquerda se

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a).$$

Similarmente, uma função é contínua em a *pela direita* se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

Observe a Figura 2. Ela exibe o que é chamado de **descontinuidade em saltos**. O nome da função da Figura 2 é $\text{floor}(x)$ (do inglês *floor*, que significa “chão”, “piso”). A função $\text{floor}(x)$ consome um número real x e produz o maior inteiro menor que x . Em outras palavras, ela despreza a parte fracionada do seu argumento.

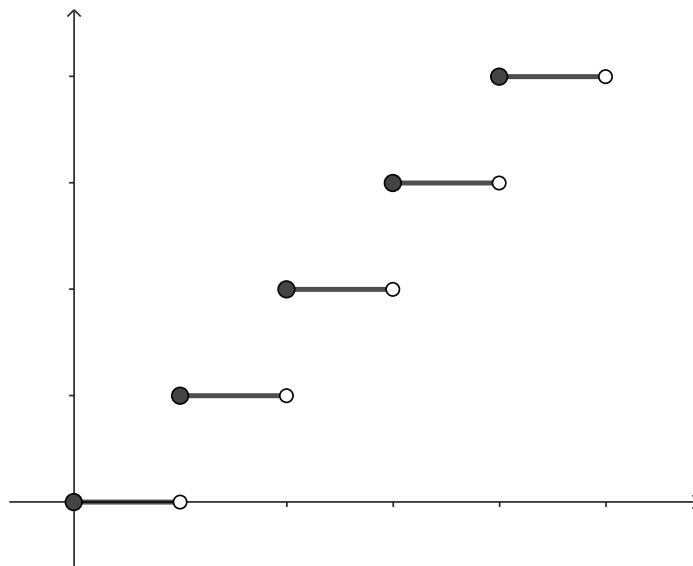


Figura 2: Descontinuidade em saltos.

A função $\text{floor}(x)$ é contínua à direita em cada número inteiro $x = n$, já que

$$\lim_{x \rightarrow n^+} \text{floor}(x) = n,$$

mas é descontínua à esquerda, já que

$$\lim_{x \rightarrow n^-} \text{floor}(x) = n - 1 \neq f(n).$$

Produza um exemplo concreto do que está escrito em abstrato. Por exemplo, quem é $\text{floor}(\pi)$? Por definição, é o maior inteiro menor que π . Que números são menores que π ? Candidatos são $\sqrt{2}$, 0, 1, 3, -1 , $-\pi$, ... Mas qual deles é o maior inteiro? É 3. Logo, $\text{floor}(\pi) = 3$. (Okay, compreendemos a definição de $\text{floor}(x)$.) Quem é $\lim_{x \rightarrow \pi} \text{floor}(x)$? Tem que ser 3. Quem é $\lim_{x \rightarrow 3} \text{floor}(x)$? Não existe. Quem é $\lim_{x \rightarrow 3^-} \text{floor}(x)$? É 2 porque, pela esquerda, estamos sempre considerando $\text{floor}(2 + h)$, sendo $h < 0$ um número pequeno. E pela direita? É 3. (Exemplo produzido. Podemos seguir.)

Continuidade num intervalo

Definição (contínua num intervalo). Uma função é contínua num intervalo (aberto ou fechado) se ela for contínua em todos os números do intervalo. (Não tem problema se f só tem continuidade lateral nas extremidades do intervalo. Ainda assim ela é chamada de “contínua” naquele ponto, naquele intervalo, mas entende-se certamente que é uma continuidade à esquerda ou à direita.)

Exercício. A função $f(x) = |x|$ é contínua em toda a linha real?

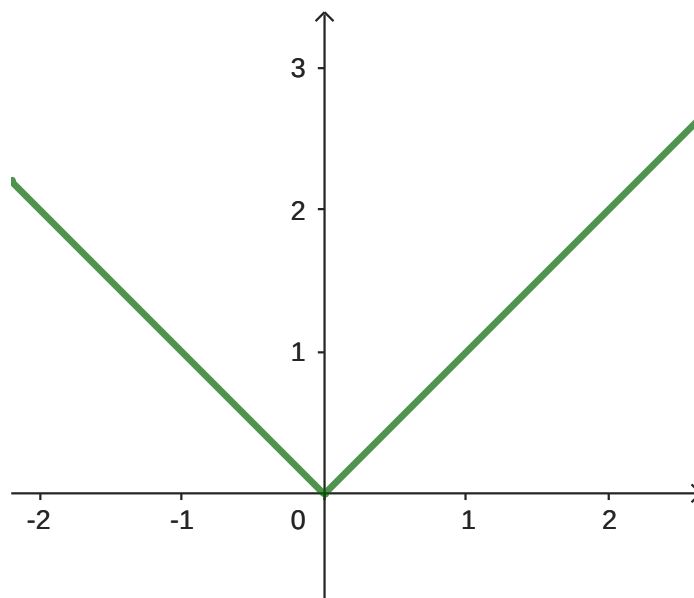


Figura 3: A distância entre x e a origem possui uma quina em $x = 0$.

Análise o problema. Se ela for contínua em $a \in \mathbb{R}$, então tem que ser verdadeiro que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} |x| = |a| = f(a)$$

pra todo $a \in \mathbb{R}$. Isso ocorre? Se sim, ela é contínua nesse intervalo.

Solução. À esquerda de $x = 0$, a função $f(x) = |x|$ é equivalente à função $y = -x$, que certamente satisfaz $\lim_{x \rightarrow a} -x = -a = f(a)$. À direita, a função $f(x) = |x|$ é equivalente à função $y = x$, que também satisfaz $\lim_{x \rightarrow a} x = a = f(a)$. Ao redor de $x = 0$, a função se aproxima de zero por ambos os lados — esquerda e direita —, logo $|x| \rightarrow 0$ com $x \rightarrow 0$. Dado que $f(0) = |0| = 0$, então ela é contínua em zero também e, portanto, contínua em toda a linha real.

Exercício. Já mostramos acima que $|x|$ é contínua em toda a linha real. Prove que se uma função f qualquer é contínua em um intervalo, então $|f|$ também é contínua nesse intervalo. Procure responder também se a continuidade de $|f|$ num intervalo implica a continuidade de f . Se não for, encontre um contra-exemplo.

Funções contínuas novas a partir de antigas

Teorema. Suponha que f e g sejam funções contínuas em um ponto $x = a$ e c seja uma constante qualquer. Sendo assim, são contínuas as funções $f + g$, $f - g$, cf , fg e f/g (sendo $g(a) \neq 0$).

Por que é verdade? Recorde a definição de continuidade e relembre as propriedades dos limites. Tomemos o quociente f/g como exemplo. Se f e g são contínuas, então os limites de f e g com $x \rightarrow a$ tem que existir. Mais ainda, $f(a)$ e $g(a)$ são valores definidos; são números. Então, por exemplo, a propriedade do quociente dos limites afirma que

$$\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}$$

Como f e g são contínuas, os limites são $f(a)$ e $g(a)$, logo

$$\lim \frac{f}{g} = \frac{f(a)}{g(a)},$$

e $f(a)/g(a)$ é a própria definição de $(f/g)(a)$. É claro que se $g(a)$ for o número zero, teremos uma divisão por zero, o que indefine esse o limite do quociente, mas é por isso que $g(a) \neq 0$ é excluído pelo teorema.

Estratégia. Esse teorema nos permite argumentar que uma função é contínua por considerar suas partes. É contínua a função $x^2 + x^3$ em $x = a$? Com certeza porque x^2 é contínua lá, x^3 também e, assim, pelo teorema acima, a soma tem que ser.

Polinômios e funções racionais são contínuas. O teorema acima e a estratégia acima nos permite provar que qualquer polinômio é contínuo, bem como é contínua qualquer função racional (onde estiver definida).

A continuidade de uma função inversa. A logarítmica, por exemplo, é a função inversa da exponencial. Assumindo que a exponencial seja contínua, por que a logarítmica também seria? Argumentemos por intuição. Lembra da estratégia de se obter o gráfico de uma função inversa por refleti-la ao redor do eixo $y = x$? Uma função é contínua se pontos “próximos” no domínio são mapeados a pontos “próximos” na imagem. (É isso que a definição de continuidade determina. Olhe a definição e veja se você consegue parear essas duas noções.) Colocando nossa régua no gráfico, fazendo noventa graus com o eixo $y = x$, você acha que a função inversa levaria pontos “próximos” a pontos “distantes”? Dificilmente. Então a inversa de uma função contínua é contínua também.

Exercício. Onde a função

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2 + 1}$$

é contínua?

Mas a função exponencial é contínua? Podemos construí-la pra ser contínua e aí podemos dizer — contínua por construção. Podemos inicialmente definir a função

exponencial a^x apenas para números racionais p/q , obtendo $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$. Até aí ela é descontínua em todos os pontos da linha real porque há buracos por toda a parte do gráfico dessa função — afinal, há números irracionais entre quaisquer dois números racionais, não importa quão próximos eles estão. Como podemos preencher esses buracos e torná-la contínua? Precisamos definir o que ocorre com a^x quando x é irracional. Tomando $x = \sqrt{2}$ como exemplo, definamos que

$$a^{\sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} a^x.$$

Substitua $\sqrt{2}$ por qualquer outro irracional agora e assim completamos a definição de a^x em toda a linha real. Você pode estar se perguntando — mas esse limite existe? Ele existe, mas isso não é estudado em cursos de Cálculo. (Livros que constroem os números reais se preocupam com limites como esse. Uma referência é “*The Structure of the Real Number System*” por Leon W. Cohen e Gertrude Ehrlich, 1963.)

Uma definição popular de número irracional é exatamente o limite de uma sequência de números racionais. Esse processo de construção (descrito aqui de forma vaga) torna a função a^x contínua por construção. (É o que faz “James Stewart” na seção 1.5 de seu livro.)

Exercício. Pra que valores de x a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional,} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

é contínua?

3 Funções compostas, um rápido mergulho

Às vezes precisamos pegar dois transportes pra chegar a algum lugar. Metrô seguido de ônibus, ônibus seguido de ônibus. Às vezes pegamos uma carona de carro com alguém até o ponto de ônibus e outras variações. Usando funções $f(x)$ e $g(x)$, suponha que $g(x)$ seja um transporte que nos leva a algum lugar. Partimos de casa em $x = c$ e g nos leva a $g(c)$. Chegando a $g(c)$, pegamos o transporte f que nos leva de $g(c)$ até $f(g(c))$. Matemáticos diriam “ f composta com g ”.

Definição. A composição das funções $I \rightarrow U: f(x)$ e $C \rightarrow I: g(x)$ é escrita

$$C \rightarrow U: (f \circ g) = f(g(x)).$$

Experimente. Note que embora se escreva $f \circ g$, a primeira função a ser aplicada a x é a função g . Se pego o ônibus A e depois o ônibus B pra ir à universidade, então a composição que pego é $B \circ A$.

Investigue. Se o ônibus B me leva até o ponto p e o ônibus A não passa em p , não dá pra compor esses dois. A imagem de g tem que coincidir com o domínio de f , necessariamente. (Não existe função mal-definida. Toda função tem que estar perfeitamente bem-definida.)

4 A continuidade de funções compostas

Teorema (da composição de funções contínuas). Sendo g contínua em a e f contínua em $g(a)$, então $f \circ g = f(g(x))$ é contínua em a .

Coloque em palavras. A composição de duas funções contínuas é contínua.

Um exemplo de uso. Quando $f(x) = \sqrt[n]{x}$ e n sendo um inteiro positivo, então

$$f(g(x)) = \sqrt[n]{g(x)}.$$

Em outras palavras, estamos dizendo que o teorema da composição de funções contínuas nos permite concluir que o limite de uma raiz é a raiz de um limite. Em símbolos, estamos dizendo que

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} g(x)},$$

que é uma propriedade de limites.

Teorema do Valor Intermediário

Teorema (do valor intermediário). Suponha f contínua em um intervalo fechado $[a, b]$. Seja N um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, sendo $f(a) \neq f(b)$. Então existe um número c em (a, b) tal que $f(c) = N$.

Exercício. Faça um desenho do que o teorema está dizendo.

Exercício. Por que o intervalo em que f é contínua tem que ser fechado? O que acontece quando o intervalo é aberto em alguma extremidade?

Exercício. Por que $f(a) \neq f(b)$? Qual o problema com $f(a) = f(b)$?

Exercício. Existe número real que seja exatamente um a mais que seu cubo?