

A derivada de funções logarítmicas e trigonométricas inversas

1 A derivada de uma função logarítmica

Seja $y = \log_a x$. Relembre que essa função é a inversa da exponencial a^x . A exponencial em base a é contínua por toda a linha real e obtemos sua inversa fazendo a reflexão relativa ao eixo $y = x$. Observando o gráfico de $\log_a x$, é razoável esperar que a curva seja derivável. Intuitivamente, uma curva possui derivadas onde ela é contínua e não possui bicos ou dobras, ou seja, onde a tangente à curva não muda de direção bruscamente. Pelo método da reflexão, sabemos que a inversa da exponencial não terá bicos ou dobras.

Como obter a derivada? Por derivação implícita. Reescreva a função colocando-a em uma base a , ou seja,

$$a^y = a^{\log_a x} = x.$$

Observe que, agora, a função logarítmica está implícita na equação porque a função logarítmica é a variável y , que não está mais isolada em um lado. Derive a equação, obtendo

$$(\ln a)a^y y' = 1.$$

Isole y' , obtendo

$$y' = \frac{1}{(\ln a)a^y}$$

Por fim, observe que, por definição, $y = \log_a x$. Assim,

$$y' = \frac{1}{(\ln a)a^{\log_a x}} = \frac{1}{(\ln a)x},$$

como desejado.

Exercício 1.1. Usando os passos acima, derive $\ln x$, lembrando que $\ln x = \log_e x$.

Exercício 1.2. Compute a derivada de $\ln(x^3 + 1)$.

Exercício 1.3. Anote seu novo teorema. O exercício anterior está lhe dizendo que a derivada de $\ln u$ com respeito a x é $1/u$ vezes a derivada de u com respeito a x . Expresse seu teorema em múltiplas notações como a de Leibniz e a de Lagrange.

Exercício 1.4. Compute a derivada de $4^x + \log_4 x$.

2 A derivada das funções trigonométricas inversas

Começemos pela inversa do seno. A função $\sin^{-1}(x)$ é muitas vezes escrita $\arcsen(x)$ — pronuncia-se “arco-seno” ou às vezes $\text{asen}(x)$ pra diminuir o tamanho do nome. Lembre-se de que pra haver uma inversa, uma função precisa ser injetora. A função $\sin x$ não é injetora, então restringe-se o domínio dela pra que se possa definir $\sin^{-1}(x)$. A restrição feita à função $\sin x$ é de que seu domínio seja $[-\pi/2, \pi/2]$, ou seja, ficamos com o pedaço $\pi/2$ ao redor da origem. Assim $y = \sin^{-1} x$ implica $\sin y = x$ e $y \in [-\pi/2, \pi/2]$. Agora computemos sua derivada.

Seja $y = \sin^{-1} x$. Se aplicarmos a função $\sin x$ a ambos os lados da equação, obtemos $\sin y = x$, que agora define y implicitamente. Usando a derivação implícita, obtemos $(\cos y)y' = 1$ e, logo,

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = y' = \frac{1}{\cos y}.$$

A esperança agora é conseguir substituir y por uma função de x , o que é possível. Relembre que $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ e obtenha a identidade $\cos y = \pm\sqrt{1 - \sin^2 y}$. Entretanto, porque estamos trabalhando com $\sin^{-1} x$, estamos sempre restritos ao intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, trecho em que $\cos y$ é sempre positivo. Logo, não nos interessa a opção $-\sqrt{1 - \sin^2 y}$ e, portanto, $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$, o que nos permite escrever

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}.$$

Por fim, observe que como $y = \sin^{-1} x$, então $\sin y = x$ e $\sin^2 y = x^2$. Logo,

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

como desejado.

Vejamos agora a inversa do cosseno. Seja $y = \cos^{-1} x$, aplique a inversa, obtendo $\cos y = x$. Por derivação implícita, obtemos $-(\sin y)y' = 1$, implicando

$$y' = -\frac{1}{\sin y}.$$

Pela identidade $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$, obtemos $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$. Lembrando que estamos interessados na derivada de $\cos^{-1} x$, estamos, então, restritos ao domínio dela, que é $[0, \pi]$. Nesse intervalo, $\sin y$ é sempre positivo, logo $\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y}$. Mas $\cos y = x$, o que nos dá $\sin y = \sqrt{1 - x^2}$. Portanto,

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

como desejado.

Exercício 2.1 (pra casa). Compute a derivada de $y = \text{tg}^{-1} x$ usando os mesmos passos acima. Aplique $\text{tg} x$ a ambos os lados, obtendo $\text{tg} y = \text{tg}(\text{tg}^{-1} x)$, derive a

equação usando derivação implícita, use a identidade $\sec^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y$ e obtenha seu teorema afirmando que

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tg}^{-1} x = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Exercício 2.2 (pra agora). Compute a derivada de $\operatorname{tg}^{-1}(4x^4 + 7)$.