

A derivada de $\log_3 x$

Por derivação implícita

Use derivação implícita e a derivada de 3^x , que é $(\ln 3)3^x$. Seja $y = \log_3 x$. Eleve a base 3 à equação, obtendo

$$3^y = 3^{\log_3 x} = x.$$

Derive a equação e isole y' , obtendo

$$\begin{aligned}(\ln 3)3^y y' &= 1 \\ y' &= \frac{1}{(\ln 3)3^y} \\ y' &= \frac{1}{(\ln 3)x},\end{aligned}$$

como desejado.

Por mudança de base, assumindo $(\ln x)' = 1/x$

Faça a troca de base e derive. Seja

$$y = \frac{\ln x}{\ln 3}.$$

Sabendo que a derivada de $\ln x$ é $1/x$, obtemos

$$y' = \frac{1}{\ln 3} \frac{1}{x} = \frac{x}{\ln 3}.$$

Essa segunda abordagem parece mais simples meramente porque assumimos aqui que conhecemos a derivada de $\ln x$. Como obteríamos a derivada de $\ln x$? Com a primeira abordagem.

Por mudança de base, sem assumir $(\ln x)' = 1/x$

A pergunta é — conseguimos obter a derivada de $\log_3 x$ usando a mudança de base, mas sem assumir que conhecemos a derivada de $\ln x$? Seja $y = \log_3 x$. Com a mudança

de base, obtemos $y = (\ln x)/(\ln 3)$. Elevando a base e à equação e usando derivação implícita, obtemos

$$\begin{aligned}\exp y &= \exp \left(\frac{\ln x}{\ln 3} \right) \\ (\exp y)y' &= \exp \left(\frac{\ln x}{\ln 3} \right) \left(\frac{\ln x}{\ln 3} \right)'.\end{aligned}$$

Observe que o lado direito ainda está na mesma forma que o lado esquerdo, já que $y = (\ln x)/(\ln 3)$, ou seja, $(\exp y)y' = (\exp y)y'$. Em outras palavras, não há qualquer coisa interessante por aqui.

Além disso, estamos usando a derivada de $\exp x$ nesta investigação, o que implica que também temos a derivada de $\ln x$ (pelo teorema da função inversa). Portanto, não é sensato impor que não usemos a derivada de $\ln x$.

Em mais detalhes, suponha que não conheçamos a derivada de $\ln x$. Uma vez que $\exp(x)$ e $\ln x$ são inversas uma da outra, então $\exp(\ln x) = x$. Computando a derivada de ambos os lados, obtemos $\exp(\ln x)(\ln x)' = 1$. Isolando $(\ln x)'$, obtemos

$$(\ln x)' = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}.$$

Em outras palavras, conhecemos a derivada de $\ln x$ se conhecemos a derivada de $\exp x$ e *vice-versa*. Se não pudermos usar a derivada de $\ln x$, não devemos usar também a derivada de $\exp x$. Sendo assim, a imposição da tarefa é pouco coerente.