

O teorema fundamental

Introdução

Investigamos na aula passada a ideia de Riemann de definir a área embaixo do gráfico de uma função positiva através da soma das áreas de retângulos. Definimos

$$\int_a^b f(x) \, dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

sendo f uma função definida em $[a, b]$, $\Delta x = (b - a)/n$ e x_i^* um ponto no i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de $[a, b]$.

Terminologia. Os números a e b são, respectivamente, *limite inferior* e *limite superior* do intervalo de integração. A função f é chamada de *integrando*. Quando o limite existe, diz-se que a função f é *integrável* em $[a, b]$.

Observe que a integral com limites inferior e superior especificados é um número, representando uma área — uma diferença de áreas, na verdade, já que $f(x)$ pode vir a ser negativa em algum trecho do intervalo de integração. Já quando escrevemos

$$\int_a^x f(t) \, dt,$$

estamos nos referindo a uma função de x e não a um número fixo. Podemos escrever

$$g(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

pra que fique claro assim que a é uma constante e que x é a variável independente dessa função g . Observe que agora usamos também a letra t pra que não confundamos a variável independente x de g com a variável independente t de f . Assim, $g(x)$ descreve uma fórmula para a área — ou seja, basta especificar um $x = b$ que

$$g(b) = \int_a^b f(t) \, dt$$

representa um número.

Terminologia. A função $g(x)$ é chamada de *integral indefinida*. Quando os limites superior e inferior do intervalo de integração são fixos, a integral é chamada de *integral definida*.

Há uma série de detalhes técnicos a respeito de uma integral que não investigaremos. Por exemplo, os subintervalos usados pela soma de Riemann não precisam ser todos do mesmo tamanho, o ponto x_i do i -ésimo retângulo que determina sua altura não precisa ser um dos extremos do subintervalo e também nem retângulos são necessários — poderíamos usar trapézios ou outras formas geométricas. Importante é que o limite exista.

Existência do número representando a área especificada pela integral. Há um teorema que afirma que se f for contínua em $[a,b]$ então f é integrável em $[a,b]$, ou seja, o número $\int_a^b f(x) dx$ existe. (O teorema é mais geral que isso: f pode ter um número finito de descontinuidades em saltos, por exemplo.)

Uma intuição por trás do teorema

O que diz o teorema fundamental? Diz duas coisas. Uma delas é que a derivada da função integral é o integrando. Eis o enunciado da afirmação 1 do teorema.

Teorema (fundamental, afirmação 1). Se f é contínua em $[a,b]$, então a função

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt$$

é contínua em $[a,b]$, derivável em (a,b) e $g'(x) = f(x)$, sendo $x \in [a,b]$.

A função $g(x)$ é a função integral. O teorema diz — a derivada de $g(x)$ é $f(x)$. Podemos dizer em outras palavras. Considere o gráfico de uma função $f(x)$ sempre positiva no intervalo $[a,b]$. Marque um ponto $x \in [a,b]$. Existe uma área embaixo de f de a até x . Se empurrarmos o ponto x pra $x+h$, a área aumenta. Com que velocidade essa área está aumentando quando estamos exatamente em $x+h$? O teorema afirma — a velocidade de crescimento dessa área é exatamente $f(x+h)$ —, o que é dizer que a inclinação da tangente à curva que descreve a área no ponto $x+h$ é exatamente $f(x+h)$.

Antes de prová-lo, vejamos por que o teorema fundamental é plausível. Sendo f uma função sempre positiva, a função

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt$$

representa a área embaixo do gráfico de $f(t)$ no intervalo $[a,x]$. Seja h um número positivo pequeno. Interprete o significado de $g(x+h) - g(x)$ em termos de áreas, observando que

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \cancel{\int_a^x f(t) dt} + \int_x^{x+h} f(t) dt - \cancel{\int_a^x f(t) dt}. \end{aligned}$$

Agora note que

$$\int_x^{x+h} f(t) dt$$

representa a área embaixo do gráfico de f no intervalo $[x, x+h]$. Como h é pequeno, podemos estimar essa área por

$$\int_x^{x+h} f(t) dt \approx hf(x),$$

já que h é a largura desse intervalinho e $f(x)$ é aproximadamente a altura do retângulo cuja área é próxima da área embaixo do gráfico de f . Em outras palavras, estamos dizendo que

$$g(x+h) - g(x) \approx hf(x)$$

e logo

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \approx f(x).$$

Recordando que a definição da derivada de uma função $g(x)$ qualquer é

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h},$$

podemos conjecturar que à medida que h decresce a zero, obteremos o fato de que

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x),$$

que é a primeira afirmação do teorema.

A afirmação 1 do teorema

Teorema (fundamental, afirmação 1). Se f é contínua em $[a,b]$, então a função

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt$$

é contínua em $[a,b]$, derivável em (a,b) e $g'(x) = f(x)$, sendo $x \in [a,b]$.

A estratégia. A prova é essencialmente a intuição que construímos anteriormente. O que faremos é formalizar o raciocínio através de uma estimativa inferior pra $g(x)$ e de uma estimativa superior pra $g(x)$. Usaremos essas estimativas pra “esmagar” a integral via uma aplicação do Teorema do Confronto.

Demonstração. Seja x e $x+h$ números no intervalo $[a,b]$. Aplicando a definição de g , podemos considerar a diferença entre $g(x+h)$ e $g(x)$ e escrever

$$g(x+h) - g(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt$$

$$= \cancel{\int_a^x f(t) dt} + \int_x^{x+h} f(t) dt - \cancel{\int_a^x f(t) dt}.$$

Já que $h \neq 0$, podemos dividir a equação por h , obtendo

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt. \quad (1)$$

Uma vez que f é contínua em $[x, x+h]$, que é um intervalo fechado, podemos aplicar o Teorema do Valor Extremo nesse intervalo, obtendo a garantia de que o mínimo absoluto de f e o máximo absoluto de f existem em algum lugar no intervalo $[x, x+h]$. Seja m esse mínimo e M , esse máximo. O mínimo nos dá um limite inferior como estimativa de $\int_x^{x+h} f(t)$. (Percebe? Basta multiplicar m por h , que obtemos um retângulo cuja área é menor que [ou igual] a área embaixo do gráfico.) Similarmente, o máximo nos dá um limite superior para a estimativa de $\int_x^{x+h} f(t)$. Em símbolos, temos

$$mh \leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq Mh.$$

Como os números m, M são imagens de algum ponto do domínio de f , podemos dar nome a esses pontos do domínio. Escolhemos os nomes u e v , ou seja, $f(u) = m$ e $f(v) = M$, sendo $u, v \in [x, x+h]$ e então reescrevemos

$$f(u)h \leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq f(v)h.$$

Novamente, já que $h \neq 0$, podemos dividir por h , obtendo

$$f(u) \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \leq f(v).$$

Usando a Equação 1, deduzimos

$$f(u) \leq \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leq f(v). \quad (2)$$

Recorde agora que u e v são variáveis representando os pontos do intervalo $[x, x+h]$ em que f apresenta seu mínimo e máximo absolutos. Portanto, se reduzirmos o intervalo $[x, x+h]$ por permitir que $h \rightarrow 0$, então necessariamente $u \rightarrow x$ e $v \rightarrow x$, o que podemos escrever simbolicamente como

$$\lim_{u \rightarrow x} f(u) = f(x) = \lim_{v \rightarrow x} f(v).$$

Por fim, usando esses limites e aplicando o Teorema do Confronto na Equação 2, obtemos

$$f(x) = \lim_{u \rightarrow x} f(u) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leq \lim_{v \rightarrow x} f(v) = f(x),$$

dando-nos o resultado de que $g'(x) = f(x)$, como desejado. $\square$

A afirmação 2 do teorema

Teorema (fundamental, afirmação 2). Se f é contínua em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a),$$

sendo F qualquer primitiva de f , ou seja, qualquer função F tal que $F'(x) = f(x)$.

Demonstração. Seja $g(x) = \int_a^x f(t) dt$. Já sabemos pela afirmação 1 que $g'(x) = f(x)$, ou seja, $g(x)$ é uma primitiva de $f(x)$. Qualquer outra primitiva $F(x)$ terá no máximo uma constante diferente de $g(x)$, ou seja,

$$F(x) = g(x) + c$$

Sendo $g(x)$ contínua, então $F(x)$ também é contínua em $[a,b]$. Pela continuidade de ambas, podemos computar

$$F(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) + c = g(a) + c$$

Mas, pela definição de g , é certo que

$$g(a) = \int_a^a f(t) dt = 0,$$

implicando que $F(a) = c$, o que nos permite deduzir

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (g(b) - c) - (g(a) - c) \\ &= g(b) - c - g(a) + c = g(b) \\ &= \int_a^b f(t) dt, \end{aligned}$$

como desejado. □

Em palavras, a afirmação 2 do teorema diz que se conhecermos uma primitiva do integrando, então conhecemos facilmente a área embaixo do gráfico do integrando — isto é, a diferença de áreas contida pelo gráfico do integrando e pelo eixo horizontal.

Exercício. Compute

$$\int_0^2 x^2 dx.$$

Exercício. Compute

$$\int_{-2}^2 x^2 dx.$$

Exercício. Verdadeiro ou falso? A área contida pela função $1/x^2$ do ponto $x = -1$ ao ponto $x = 2$ é

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^2 x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}.$$