

As funções hiperbólicas

1 Introdução

Nosso objetivo é meramente conhecer essas funções. Como se conhece uma função? Compreendemos a definição dela, ou seja, o domínio, a imagem; observamos o gráfico procurando por características interessantes delas como, por exemplo, o que acontece quando $x \rightarrow \pm\infty$, se a função tem assíntotas, onde ela é crescente, decrescente, onde têm mínimos e máximos locais *et cetera*.

2 As definições

Análogas às funções trigonométricas, as funções hiperbólicas são combinações das funções e^x e e^{-x} . A definição do *seno hiperbólico* é

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

O *coseno hiperbólico* define-se por

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

A *tangente hiperbólica* define-se por

$$\tanh x = \frac{\sinh}{\cosh},$$

e as outras funções definem-se pelo que esperamos, ou seja,

$$\begin{aligned}\operatorname{csch} x &= \frac{1}{\sinh x} \\ \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x} \\ \operatorname{ctgh} x &= \frac{1}{\tanh x}.\end{aligned}$$

Assim como as funções trigonométricas, as hiperbólicas possuem várias identidades análogas, o que você pode descobrir experimentando as definições. Inspire-se nas trigonométricas.

3 Os gráficos

O seno hiperbólico. Observe pelo gráfico da Figura 1 que a função $\sinh x$ possui domínio $\mathbb{R}$ e imagem $\mathbb{R}$. (A função $\sinh x$ lembra o gráfico da função x^3 e, de fato, ambas são funções ímpares.) Sendo ímpar, obtemos a identidade $\sinh(-x) = -\sinh x$.

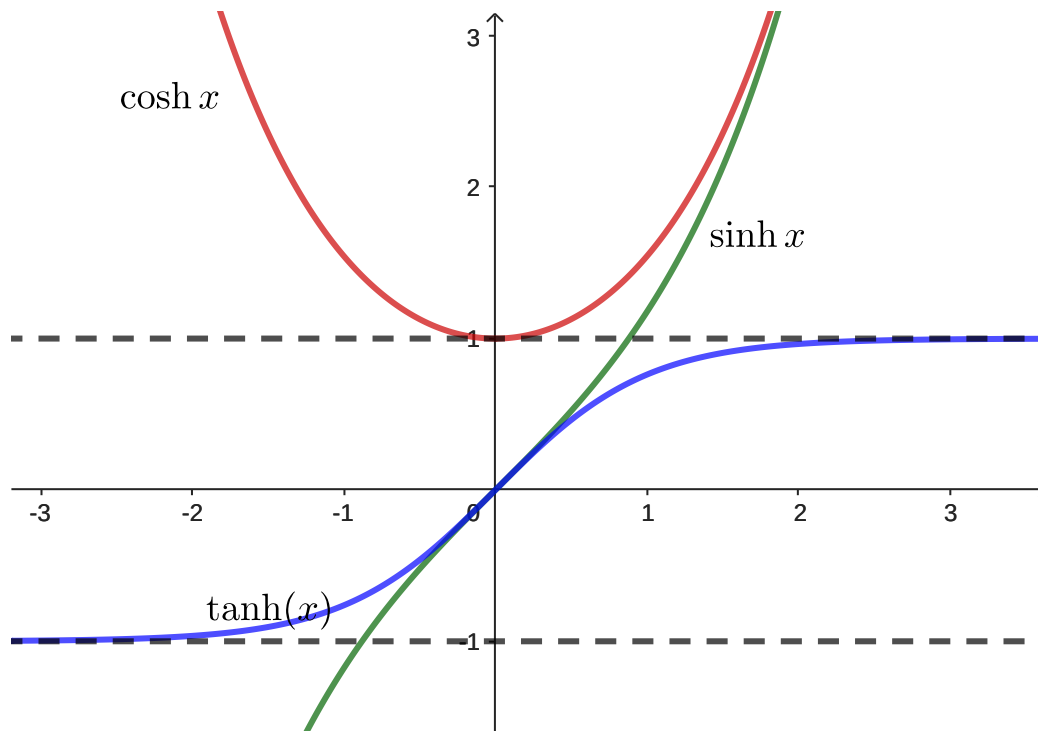


Figura 1: Os gráficos de $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$.

O cosseno hiperbólico. O domínio de $\cosh x$ é toda a linha real também, mas a imagem é o intervalo $[1, \infty)$. O cosseno hiperbólico lembra uma parábola. Sendo par, obtemos a identidade $\cosh(-x) = \cosh x$.

A tangente hiperbólica. Tem domínio $\mathbb{R}$, mas a imagem fica delimitada por duas assíntotas horizontais $y = \pm 1$, logo imagem $(-1, 1)$.

4 Por que “hiperbólicas”?

Pra responder, precisamos da identidade análoga à trigonométrica $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Nas funções hiperbólicas, a identidade é

$$\sinh^2 x - \cosh^2 x = 1. \quad (1)$$

Pra obtê-la, aplique a definição de cada uma no lado esquerdo da Equação 1, obtendo

$$\sinh^2 x - \cosh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} \right) - \left(\frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \right) \\
&= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} \\
&= \frac{4}{4} = 1.
\end{aligned}$$

Com as funções trigonométricas, o ponto $(\cos t, \sin t)$ cai sobre o círculo unitário, já que $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Similarmente, se t for um número real qualquer, então o ponto $(\cosh t, \sinh t)$ cai sobre o braço direito da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$.

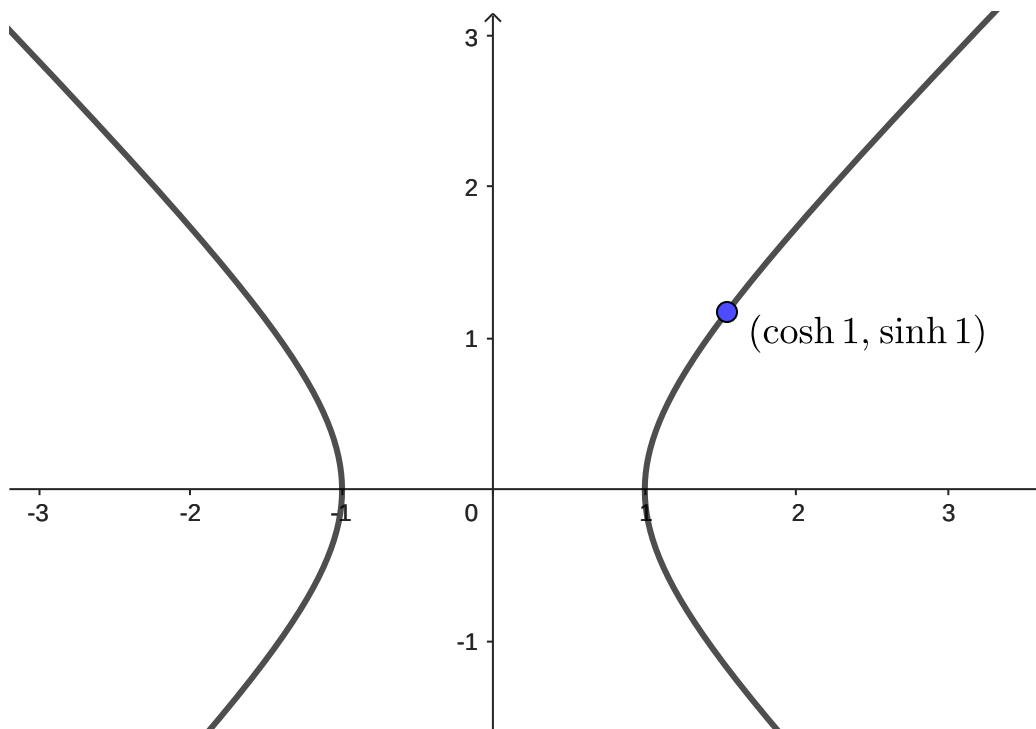


Figura 2: O ponto $(\cosh 1, \sinh 1)$ cai sobre a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$.

Então é isso. “Hiperbólicas” pela conexão com a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$.

5 As derivadas das funções hiperbólicas

É fácil obter as derivadas das funções hiperbólicas, já que sabemos derivar e^x .

Exercício 5.1. Compute a derivada de $\sinh x$.

Exercício 5.2. Compute a derivada de $\cosh x$.

Exercício 5.3. Compute a derivada de $\tanh x$.

6 As catenárias

Uma aplicação de funções hiperbólicas é modelar a altura de um cabo pendurado em duas extremidades, como os cabos que prendem o bondinho do Rio de Janeiro, um fio de telefone pendurado em postes pela cidade *et cetera*. (Veja problema 51, seção 3.11, sexta edição, “James Stewart”.) A gravidade terrestre “puxa” o fio e ele faz uma barriga tomando a forma do gráfico

$$y = c + a \cosh(x/a),$$

sendo c, d duas constantes. O nome dessa curva é “catenária”, palavra que vem do Latim *catena*, que significa corrente. Quando penduramos uma corrente por suas extremidades, obtemos uma barriga, como ocorre com fios. Talvez seja essa a razão do nome que foi dado à curva.