

Derivação implícita

1 Definição implícita e explícita

Diz-se que uma variável dependente y está definida de forma explícita quando ela está separada de sua variável independente. Por exemplo, $y = x + 1$, $y = \sin(x^2 + 3)$, $y = x^5 + \ln(x^2 + 7)$ e, de uma forma geral, $y = f(x)$. Já a expressão $x^2 + y^2 = 1$, embora seja possível isolar y , define duas funções y de forma implícita. Nesse caso em particular, é possível explicitar que duas funções são essas de forma algébrica — são elas $y = \pm\sqrt{x^2 + 1}$. Em outros casos, não é possível explicitar, como é o caso da curva $x^3 + y^3 = 6xy$, chamada de “fólio de Descartes”. (A palavra fólio vem de *folium*, que significa folha, coerente com o gráfico da curva.) Então é possível definir funções de forma implícita.

É admirável que mesmo sem conseguir explicitar uma função y relativo a uma variável independente x , ainda assim é possível obter a derivada de y através da estratégia chamada “derivação implícita”, que é uma aplicação da regra da cadeia.

[A regra da cadeia é] uma das mais importantes regras de derivação. – James Stewart, seção 3.4.

2 A derivação implícita

Relembremos a regra da cadeia. Sejam f, g funções de x , diferenciáveis onde precisam ser pra que a composta $f \circ g$ seja diferenciável. Então, diz a regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$$

Observe a regra da cadeia e suponha que escrevamos $y = g(x)$, o que nos permite reescrever a regra da cadeia como

$$\frac{d}{dx}f(y) = f'(y)y'. \quad (1)$$

É essa reescrita que é chamada de “derivação implícita”. Em vez de derivar $f(g(x))$ com respeito a x , derive $f(y)$ com respeito a y usando a Equação 1. O resultado tem que ser o mesmo, mas muitas vezes não há uma escolha de caminho a seguir porque só a derivação implícita pode nos ajudar quando não é possível definir y explicitamente com respeito a x ,

3 Um exemplo

Compute a derivada de y , definida implicitamente pela equação $\sin(y) + y^3 = 6 - x^3$. *Solução.* Começemos pelo lado direito da equação, o que já sabemos fazer. A derivada de $6 - x^3$ é $-3x^2$. Para o lado esquerdo, sigamos devagar — derivaremos a soma $\sin(y) + y^3$ termo a termo.

Começando por $\sin(y)$, observe a Equação 1. A função $\sin$ aqui toma o lugar da função f na Equação 1. Logo, $\sin(y)$ é $\cos(y)y'$. Similarmente, a derivada de y^3 é $3y^2y'$. Assim, a derivada da equação $\sin(y) + y^3 = 6 - x^3$ é

$$\cos(y)y' + 3y^2y' = -3x^2.$$

Ainda não sabemos quem é y' , mas a equação acima tem que ser verdadeira porque estamos meramente aplicando a regra da cadeia, isto é, a derivação implícita.

Fatore y' no lado esquerdo e isole y' , obtendo

$$\begin{aligned} (\cos(y) + 3y^2)y' &= -3x^2 \\ y' &= \frac{-3x^2}{\cos(y) + 3y^2}. \end{aligned}$$

Parece que obtivemos y' , a derivada de y , que era o que desejávamos. Entretanto, y' ainda está em função de y , já que y aparece em sua fórmula. Será que isso é um obstáculo pra que usemos a derivada como temos precisado? Responderemos ao fim desta investigação.

Quando queremos obter uma reta tangente a uma curva, computamos a derivada da curva no ponto de interesse, o que nos dá a inclinação e com a inclinação (e mais o ponto de interesse) obtemos a reta tangente.

Obtenhamos a reta tangente à curva $\sin(y) + y^3 = 6 - x^3$ no ponto $P = (\sqrt[3]{6}, 0)$ (ilustrada pela Figura 1) usando a derivada y' que computamos acima. Primeiro observe que o ponto P está de fato na curva, já que $\sin(0) + 0^3 = 0 = 6 - (6^{1/3})^3$.

A derivada que temos,

$$y' = \frac{-3x^2}{\cos(y) + 3y^2}$$

diz que basta substituir x e y na fórmula dada por y' pra sabermos a inclinação da reta tangente à curva $\sin(y) + y^3 = 6 - x^3$ no ponto $(\sqrt[3]{6}, 0)$. Fazendo isso, obtemos

$$y' = \frac{-3(6^{1/3})^2}{\cos(0) + 3 \cdot 0^2} = -3\sqrt[3]{36} \approx -9.91.$$

É a inclinação que desejávamos. Assim, a reta tangente é

$$y = -(3\sqrt[3]{36})(x - \sqrt[3]{6}),$$

ilustrada pela Figura 1. O fato da inclinação de uma reta tangente depender de ambas coordenadas — x e y — do ponto de interesse não é um obstáculo ao uso da derivação implícita. (Evidentemente, já que acabamos de usá-la pra obter a reta tangente.)

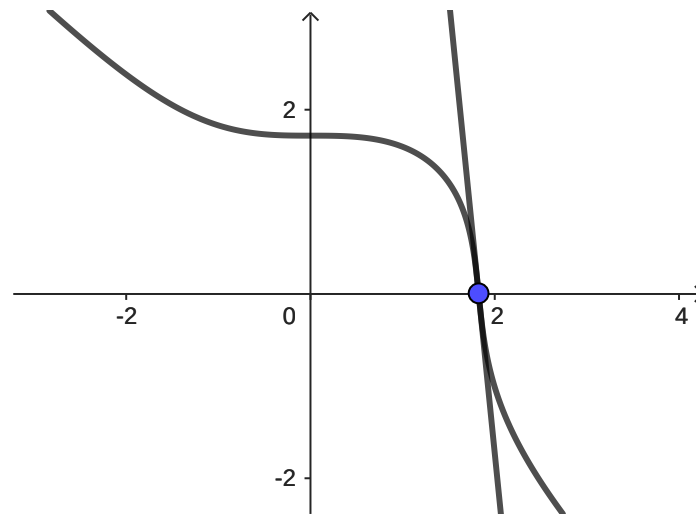


Figura 1: A tangente à curva $\sin(y) + y^3 = 6 - x^3$ no ponto $(\sqrt[3]{6}, 0)$.

4 O algoritmo

Como computar a derivação implícita? A você será dada uma equação que define uma variável y de forma implícita. **Passo 1.** Compute a derivada de cada lado da equação, tratando termos envolvendo x de forma usual e termos envolvendo y da forma que estudamos aqui, ou seja, usando a regra da cadeia. **Passo 2.** Colete todos os termos y' em um lado da equação e coloque todos os outros termos no outro lado da equação. **Passo 3.** Fatore y' e isole y' .