

A derivada de uma função que mede o quão rápido se move a interseção entre a reta tangente à curva $1/x$ e o eixo vertical

4 de maio de 2023

Exercício. Seja $r(x)$ a equação da tangente à curva $1/x$ no ponto $(x, 1/x)$. Seja $g(x)$ a função que associa x à interseção que a reta $r(x)$ faz com o eixo y . Compute a derivada de $g(x)$ no ponto $x = 1$. $\square$

Uma interpretação do exercício. O problema está pedindo por quão rápido a interseção entre o eixo y e a tangente $r(x)$ está descendo no momento em que a tangente passa por $x = 1$ à medida que nos movemos pra direita. $\square$

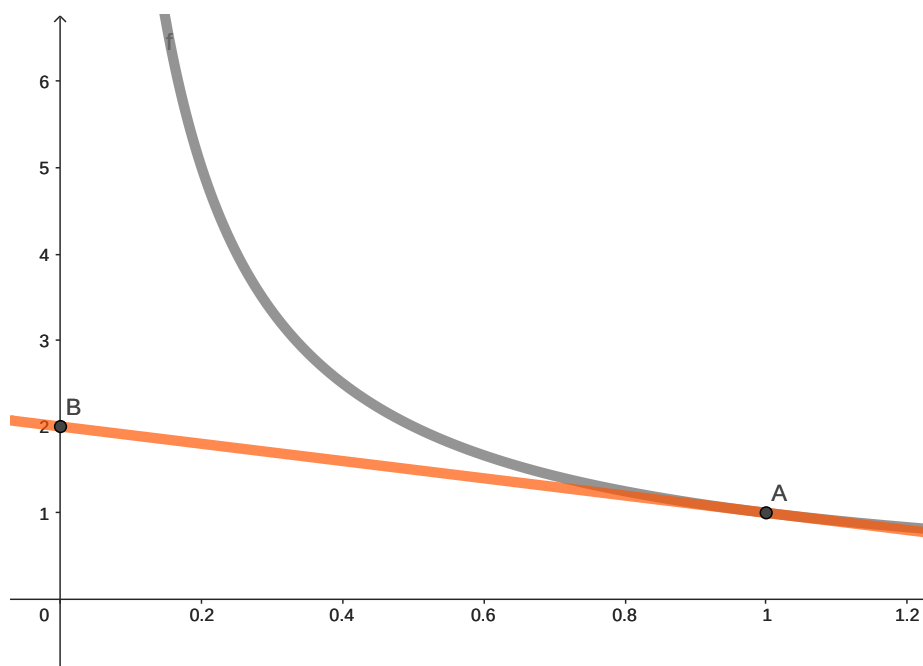


Figura 1: À medida que o ponto A se move pra direita, o ponto B desce em direção à origem. O problema está perguntando — quão rápido B está descendo quando A passa pelo ponto $x = 1$?

Solução. A derivada de $1/x$ é $-1/x^2$. Agora considere um ponto $A = (a, 1/a)$ qualquer na curva $1/x$. A inclinação da tangente no ponto $(a, 1/a)$ é $-1/a^2$. Logo, a

equação da tangente é

$$\begin{aligned}r(x) - \frac{1}{a} &= -\frac{1}{a^2}(x - a) \\r(x) &= -\frac{x}{a^2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{-x + 2a}{a^2}.\end{aligned}$$

Agora precisamos descobrir a interseção entre $r(x)$ e o eixo vertical, mas essa interseção ocorre quando $x = 0$, ou seja

$$g(a) = r(0) = \frac{2a}{a^2} = \frac{2}{a}.$$

(Observe que em vez de escrever $g(x)$, estamos escrevendo $g(a)$. É o mais natural a fazer já que escrevemos o ponto como $A = (a, 1/a)$ e obtivemos a equação de $r(x)$ usando ambas letras a e x . Se fôssemos manter x em g , teríamos que trocar as letras na equação acima, o que seria um trabalho a mais.)

Agora, se temos a função $g(a)$, temos também sua derivada, que é

$$g'(a) = \frac{-2}{a^2}.$$

O problema pede pelo ponto $a = 1$, logo $g'(1) = -2$. □

Verificações. A inclinação de $g(a)$ parece correta porque ela é sempre negativa e porque ela vai pra zero à medida que a viaja pra direita no eixo x . □