

# Teorema da Função Inversa

## 1 Introdução

Seja  $y = f(x) = x^2$  e assumamos  $x > 0$ . Defina  $g(y) = \sqrt{y} = x$ . Observe que

$$g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x| = x,$$

já que estamos assumindo  $x > 0$ . Sob essas condições, a função  $g$  desfaz a transformação feita por  $f$  e, por isso, podemos dizer que uma é inversa da outra. Como inversas são únicas, podemos dizer que uma é a inversa da outra.

A notação  $dy/dx$  significa a derivada de  $y$  com respeito a  $x$ , que é  $2x$  no exemplo acima. Já  $dx/dy$  significa a derivada da função  $x$  com respeito a  $y$ , o que nos exige obter a inversa de  $y$ . No exemplo acima,  $dx/dy$  é a derivada de  $g(y)$ , que é  $1/(2\sqrt{y})$ . Observe agora que

$$\frac{dy}{dx} \frac{dx}{dy} = 2x \frac{1}{2\sqrt{y}} = 2x \frac{1}{2\sqrt{x^2}} = 2x \frac{1}{2|x|} = 2x \frac{1}{2x} = 1.$$

Esse exemplo ilustra o Teorema da Função Inversa. O exercício 67 de James Stewart na seção 3.5 — derivação implícita — enuncia o teorema.

**Teorema** (da função inversa). Suponha que  $f$  seja uma função injetora, derivável e que sua inversa  $f^{-1}$  seja também derivável. Então

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

desde que  $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ .

*Demonstração.* Seja  $y = f^{-1}(x)$ . Logo,  $f(y) = x$ . Derivando ambos os lados dessa última equação, usando derivação implícita na esquerda e explícita na direita, obtemos  $f'(y)y' = 1$ . Isolando  $y'$ , obtemos

$$y' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

como desejado. □

**Coloque em palavras.** A derivada de  $f^{-1}$  no ponto  $x$  pode ser obtida pela composição da derivada de  $f$  com  $f^{-1}$ . Ela é o inverso multiplicativo dessa composição. (Assumindo que essa composição seja diferente de zero: de outra forma, teríamos uma divisão por zero.)

**Exercício** (item (b) do exercício 67, seção 3.5). Use o teorema da função inversa pra obter  $(f^{-1})'(5)$ , assumindo que  $f(4) = 5$  e  $f'(4) = 2/3$ . Você vai obter  $(f^{-1})'(5) = 3/2$ , que é o inverso multiplicativo de  $f'(4)$ .

**Comentário.** Observe que o exemplo restringe  $x > 0$  já que a função  $f(x) = x^2$  não seria injetora sem essa restrição, ou seja, o exemplo prepara o contexto pra que haja uma inversa.

**Na notação de Leibniz.** O teorema da função inversa é às vezes enunciado brevemente por

$$\frac{dy}{dx} \frac{dx}{dy} = 1,$$

assumindo que a inversa de  $y$  exista — de outra forma  $dx/dy$  não poderia ser computada porque  $dx/dy$  é a derivada da inversa de  $y$ , afinal a inversa de  $y(x)$  é uma função  $x(y)$ .

**Reconheça.** Observe que a estratégia que usamos para a derivada de  $\sin^{-1}(x) = \arcsin(x)$ , de  $\cos^{-1}(x) = \arccos(x)$ , de  $\ln(x)$  e de outras é exatamente a prova do teorema da função inversa. Em outras palavras, sempre que usamos essa estratégia pra computar a derivada de uma função, estamos provando o teorema da função inversa pra um caso específico. Conclua, então, que essa estratégia é eficaz em qualquer caso em que a inversa da função  $f$  (a ser derivada) existe — o que às vezes exige uma restrição de domínio no contexto.

**Relembre.** A inversa de  $f$  existe sempre que  $f$  é injetora, o que significa que  $f$  passa no teste da reta horizontal — “teste da reta horizontal”, “James Stewart”, seção 1.6.