

A regra de l'Hospital

As formas indeterminadas

O teorema de l'Hospital é útil pra calcular limites que tomem as *formas indeterminadas*. As formas indeterminadas são

- (a) quocientes indeterminados, que tomam a forma $0/0$, $\pm\infty/(\pm\infty)$
- (b) produtos indeterminados, que tomam a forma $0 \cdot (\pm\infty)$
- (c) diferenças indeterminadas, que tomam a forma em $\infty - \infty$
- (d) e potências indeterminadas, que são as formas

do tipo 0^0

do tipo ∞^0

do tipo 1^∞

Mas é importante observar que o teorema de l'Hospital só trata das formas indeterminadas $0/0$ e $\pm\infty/(\pm\infty)$, ou seja, a regra de l'Hospital só trata de quocientes indeterminados. Os outros casos precisam ser sempre reescritos como quocientes indeterminados. Quando usamos um teorema, devemos sempre verificar e anunciar ao leitor que temos a exata condição imposta pelo teorema.

Vejamos o que diz o teorema.

O teorema de l'Hospital

Teorema (de l'Hospital). Suponha que f e g sejam diferenciáveis e que $g'(x) \neq 0$ pra todo $x \neq a$ em um intervalo aberto I e $a \in I$, ou seja, a derivada de g é não-nula em I exceto possivelmente em $x = a$. Suponha também que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

ou que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty,$$

ou seja, suponha que o limite de f/g tome a forma $0/0$ ou $\pm\infty/(\pm\infty)$ à medida que $x \rightarrow a$. Então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

desde que o limite da razão de derivadas exista ou desde que o limite da razão de derivadas tenda a $\pm\infty$.

Coloque em palavras. O teorema diz que podemos trocar o limite de uma razão de funções pelo limite da razão das derivadas das funções. Mas, pra conseguir usar o resultado, precisamos satisfazer as condições.

Organize as condições e suas alternativas. Observe que há várias alternativas de condições no teorema. Um teorema é sempre da forma $P \implies Q$. Chamamos P de antecedente e Q , de conseqüente. O símbolo P representa todas as condições do teorema. Quais são as condições de l'Hospital? São

- (a) f, g deriváveis,
- (b) $g' \neq 0$ exceto possivelmente em a ,
- (c) a razão f/g precisa tender a $0/0$ ou ∞/∞ (sendo que sinais negativos não atrapalham em nada).
- (d) o limite de f'/g' também tem que existir ou então o limite de f'/g' precisa divergir pra ∞ ou pra $-\infty$.

Em outras palavras, o limite de f'/g' tem que existir ou não precisa existir. Fica parecendo que pode tudo, não? Mas, não, note que se os limites laterais de f'/g' forem diferentes, o limite então não existe e não é ∞ nem $-\infty$. Assim, nessas condições, não poderemos aplicar l'Hospital.

Observe então que escrevemos uma parte das condições do teorema antes do conseqüente e depois continuamos a escrever mais condições depois do conseqüente — que é quando dizemos “desde que...”. Essa aparente falta de organização torna a leitura mais fluida. Se for confuso, declare todas as condições antes de enunciar o conseqüente do teorema. Ler um livro de matemática é reescrever o livro — em suas palavras.

Vejamos um primeiro exemplo de uso do teorema.

Exemplo. Pra computar

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-x},$$

poderíamos fatorar e observar que ficou fácil perceber o comportamento da função racional quando $x \rightarrow 1$. Em vez disso, observe que esse limite toma a forma $0/0$ e $x^2 - x \neq 0$ pra todo x em toda a linha real exceto em $x = 1$. Satisfazemos o teorema. Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{1} = 1.$$

A intuição por trás da regra de l'Hospital. Quando o limite que queremos computar toma a forma $0/0$, é fácil compreender por que o teorema é verdadeiro. Imagine o desenho dos gráficos de f e g (e não de f/g). Se a razão f/g toma a forma $0/0$, então ambas f e g cruzam o eixo x e se intersectam lá quando $x = a$, ou seja, $f(a) = 0 = g(a)$. Logo, as equações pras reta tangentes a f e g são, respectivamente,

$$y - f(a) = y = f'(a)(x - a) \quad \text{e} \quad y - g(a) = y = g'(a)(x - a).$$

À medida que nos restringimos a uma vizinhança bem pequena ao redor de $x = a$, as retas tangentes às curvas se tornam indistinguíveis das curvas f e g , ou seja,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)(x - a)}{g'(a)(x - a)}$$

quando estamos “infinitamente próximos de a ”, se você me permitir usar essas palavras. Quanto mais próximos de a ficamos, mais plausível fica a inferência de que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(a)(\cancel{x - a})}{g'(a)(\cancel{x - a})} = \frac{f'(a)}{g'(a)},$$

lembrando que quando computamos um limite $x \neq a$, ou seja, x nunca é a exatamente e, por isso, não estamos realizando uma divisão por zero.

Provar o teorema em sua generalidade requer o teorema do valor médio de Cauchy, que é uma generalização do teorema do valor médio, mas que não vimos neste curso. James Stewart prova o teorema no Apêndice F, páginas A43–A44 da tradução da sexta edição norte-americana.

1 Exercícios

Vejamos alguns exemplos de uso da regra de l'Hospital. Já vimos a forma $0/0$. Vejamos agora a forma ∞/∞ , que é essencialmente o mesmo caso dentre qualquer possibilidade de $\pm\infty/(\pm\infty)$.

Exercício 1.1. Compute

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x}{x^2 - x},$$

observando que temos a forma ∞/∞ . Aplique l'Hospital e confirme o resultado resolvendo o limite sem l'Hospital.

Exercício 1.2. Compute

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x,$$

observando que temos a forma $0/(-\infty)$. Escreva $x = 1/(1/x)$, identifique a nova forma indeterminada e aplique l'Hospital pra computar a resposta. Depois, compute o mesmo limite, mas dessa vez escreva $\ln x = 1/(1/\ln x)$, identifique a forma indeterminada, aplique l'Hospital e obtenha a resposta. Qual alternativa você prefere?

Exercício 1.3. Façamos em sala os exercícios da “lista 3 prova 2” sobre l’Hospital.

(a) $\lim \frac{x^9 - 1}{x^5 - 1}$ com $x \rightarrow 1$

(b) $\lim \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ com $x \rightarrow \infty$

(c) $\lim \left(x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \right)$ com $x \rightarrow \infty$

(d) $\lim \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ com $x \rightarrow 1$

(e) $\lim x^{x^2}$ com $x \rightarrow 0^+$

(f) $\lim x^{1/x}$ com $x \rightarrow \infty$

(g) $\lim (1 - 2x)^{1/x}$ com $x \rightarrow 0$

Exercício 1.4. Posso ou não posso deduzir

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\infty$$

a partir do teorema de l’Hospital?