

Linearização

1 Aproximação linear

Sabemos que, numa vizinhança pequena ao redor de certo ponto $x = a$, uma curva $f(x)$ é muito próxima da reta tangente à curva no ponto $x = a$. Quanto mais próximo estamos de a , mais parecida elas ficam.

Suponha que tenhamos a altura $f(a)$ de uma curva f . Por exemplo, seja $f(x) = \ln x$. Certamente sabemos que $\ln 1 = 0$. Mas não é fácil obter pontos na curva ao redor de $x = 1$. Por exemplo, o que seria uma estimativa pra $\ln 1.01$? Usar a reta tangente como aproximação é uma alternativa pra obter essa estimativa. Em outras palavras, em vez de calcularmos $\ln 1.01$, podemos calcular $L(1.01)$, sendo L a reta tangente a $\ln x$ no ponto $x = 1$.

Assim, a reta tangente

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

é uma aproximação da curva $f(x)$ ao redor de $x = a$, isto é,

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

Terminologia. Essa aproximação é chamada de *aproximação linear* ou *aproximação pela reta tangente*. A reta tangente em si, cuja equação é $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ é chamada de *linearização* de f em a .

Exercício 1.1. Encontre a aproximação linear da função $f(x) = \sqrt{1 - x}$ em $a = 0$ e use-a para aproximar os números $\sqrt{0.9}$ e $\sqrt{0.99}$. *Solução.* A derivada é $-1/(2\sqrt{1 - x})$, então $f'(0) = -1/2$ e $f(0) = 1$. Logo,

$$\sqrt{1 - x} = f(x) \approx f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 + \frac{-1}{2}x = 1 - \frac{1}{2}x.$$

Portanto,

$$\sqrt{0.9} = \sqrt{1 - 0.1} \approx 1 - \frac{1}{2}0.1 = 1 - 0.05 = 0.95$$

$$\sqrt{0.99} = \sqrt{1 - 0.01} \approx 1 - \frac{1}{2}0.01 = 1 - 0.005 = 0.995,$$

como desejado.

2 Diferenciais

Usamos a notação Δy pra nos referir à variação vertical de uma curva y relativa a uma variação Δx no domínio de y . Suponha que tenhamos uma reta tangente a uma curva y num ponto $P(x, y)$. Se variarmos o domínio em Δx , então temos o ponto $Q(x + \Delta x, y(x + \Delta x))$. A variação vertical decorrente é

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x),$$

como já sabemos.

Considere agora a reta tangente $L(x)$ à curva y no ponto P . A inclinação dela é $y'(x)$. Defina uma variável dependente chamada de dy em função de uma variável independente chamada de dx através da relação

$$dy = y'(x)dx. \quad (1)$$

Seja $dx = \Delta x$. Comparemos Δy com dy . A variação vertical da curva y é $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$. Quem é a variação vertical da mudança decorrente na reta $L(x)$ tangente à curva? Só pode ser

$$\begin{aligned} L(x + \Delta x) - L(x) &= L(x + dx) - L(x) \\ &= (y(a) + y'(a)(x + dx - a)) - (y(a) + y'(a)(x - a)) \\ &= \cancel{y(a)} + \cancel{y'(a)x} + y'(a)dx - \cancel{y'(a)a} - \cancel{y(a)} + \cancel{y'(a)x} + \cancel{y'(a)a} \\ &= y'(a)dx \end{aligned}$$

Portanto, a variação vertical que ocorre na reta tangente $L(x)$ é precisamente a variável dy definida na Equação 1.

Atenção. Note que foi definida uma variável dy em função de uma variável dx . Isso não significa que estejamos falando do objeto dy/dx que definimos como um limite em aulas anteriores. O que estamos fazendo é reutilizando uma notação já conhecida pra um novo propósito. A razão dessa reutilização é que se, por exemplo, dividirmos a Equação 1 por $dx \neq 0$, obteremos

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

o que casa perfeitamente com a derivada de $f(x)$ como conhecemos. Assim temos dy/dx como um limite em um contexto e temos dy como variável dependente e dx como variável independente em outro contexto. Esse novo contexto em que estamos é na reta tangente à curva y que estamos considerando neste momento. Enquanto uma mudança em Δx provoca uma variação Δy , uma mudança em dx provoca uma mudança na reta tangente que é medida precisamente por $dy = f'(x)dx$.

Note também que a relação $dy = f'(x)dx$ se modifica pra cada ponto x no domínio. Por exemplo, no ponto $x = a$, temos $dy_a = f'(a)dx$ e, no ponto $x = b$, temos $dy_b = f'(b)dx$, afinal a inclinação da reta tangente muda a cada ponto.

Exercício 2.1. Encontre a diferencial dy da função $y = x^2 \operatorname{sen}(x)$.

Exercício 2.2. Encontre a diferencial dy da função $\exp(x/10)$ no ponto $x = 0$ usando $dx = 0.1$.