

Funções inversas, exponenciais e logarítmicas

1 Funções inversas

Eis uma função e sua inversa expressas por uma tabela. Suponha que a função $f(t)$ descreva a quantidade de bactérias a cada hora.

t	$N = f(t)$
0	100
1	168
2	259
3	358
4	445

Tabela 1: A população no instante t .

N	$t = f^{-1}(t)$
100	0
168	1
259	2
358	3
445	4

Tabela 2: O tempo t pra N bactérias

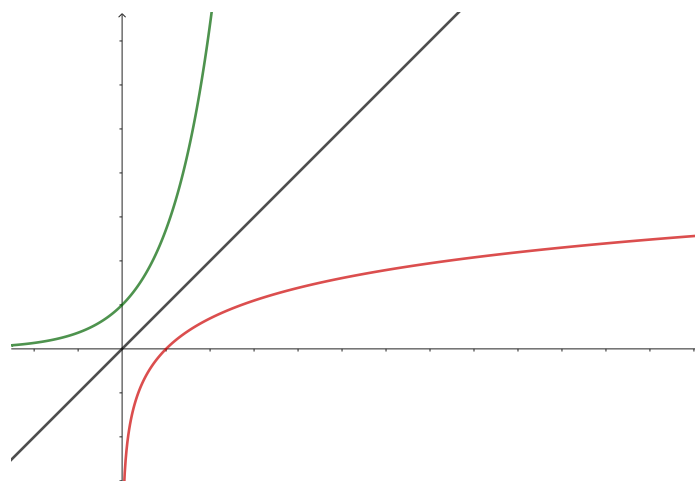


Figura 1: A função inversa de uma curva é uma reflexão relativa à reta $y = x$ porque a inversa inverte as coordenadas dos pontos do gráfico. Em símbolos, $(a, b) \in G(f)$ se torna $(b, a) \in G(f^{-1})$.

Nem sempre há inversa. Nem toda função tem uma inversa. Por exemplo, x^2 associa tanto $x = 1$ quanto $x = -1$ ao número $y = 1$. Sua inversa, se existisse, teria que associar o número $y = 1$ a ambos $x = \pm 1$, o que violaria a definição de função.

Condições pra existência de função inversa. Pra que uma função f tenha uma inversa, a função f precisa ser injetora e sobrejetora, que é o mesmo que dizer que f é bijetora.

O teste da reta horizontal. Pra saber se uma função é injetora, faça o teste da reta horizontal. Trace uma horizontal por todo o eixo vertical procurando onde a reta intercepta a curva em pelo menos dois pontos. Se sempre houver uma única interceptação, ela é injetora.

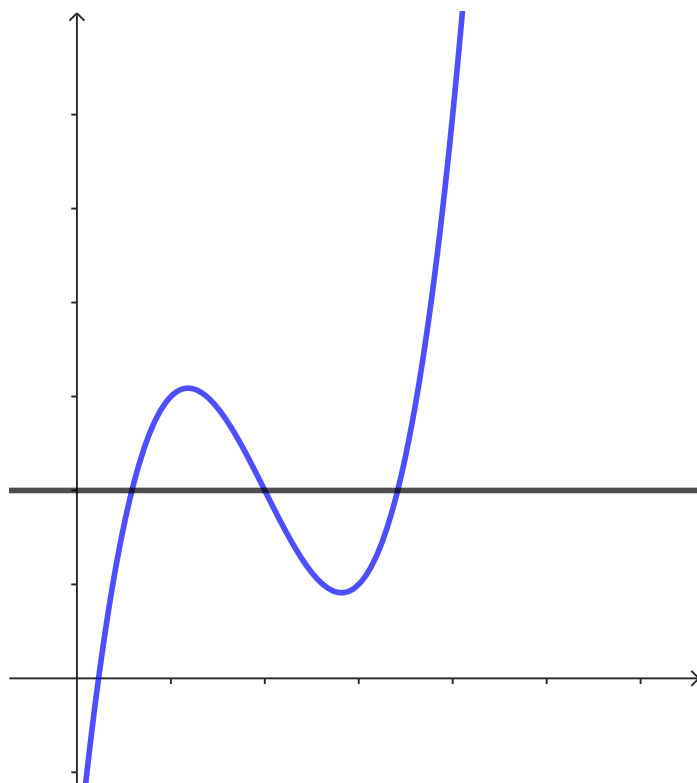


Figura 2: O teste da reta horizontal contra a curva $p(x) = (x-2)^3 - 2(x-2) + 2$. O teste intercepta a curva em mais de um ponto, logo $p(x)$ não é injetora.

Definição, função inversa. Seja f uma função injetora com domínio A e imagem B . Sua função inversa f^{-1} tem domínio B e imagem A , sendo definida por

$$f^{-1}(y) = x \in A \iff f(x) = y$$

pra todo y em B . (Talvez seja melhor dizer que f^{-1} tem domínio B e imagem A e satisfaz $f^{-1}(f(x)) = x$.)

Observe. Não se fala em contradomínio na definição, mas sim na imagem porque o contradomínio de uma função f — que tem inversa — precisa ser igual à imagem de f . Caso contrário, a função f^{-1} teria pelo menos um ponto indefinido, o que viola a definição de função.

Notação. Não confunda $f^{-1}(x)$ com $1/f(x)$. Quando se quer dizer $1/f(x)$ pode-se dizer $[f(x)]^{-1}$.

Algoritmo, como achar uma função inversa? Escreva $y = f(x)$. Isole x , escrevendo x em função de y — se for possível. Troque x por y , obtendo $y = f^{-1}(x)$.

Exercício. Encontre a inversa de $f(x) = x^3 + 2$. Siga o algoritmo passo a passo. Você deve obter $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$. Quem é o domínio da função inversa? E o contra-domínio?

2 Funções exponenciais

Uma função exponencial tem a forma $f(x) = a^x$ sendo a uma constante positiva.

Estude os gráficos. Observe como 2^x sobe mais lentamente que 3^x em $x > 0$. Observe como $(1/2)^x$ desce mais lentamente que $(1/3)^x$ em $x > 0$. A linha tracejada é a altura $y = 1$. Identifique cada curva no gráfico.

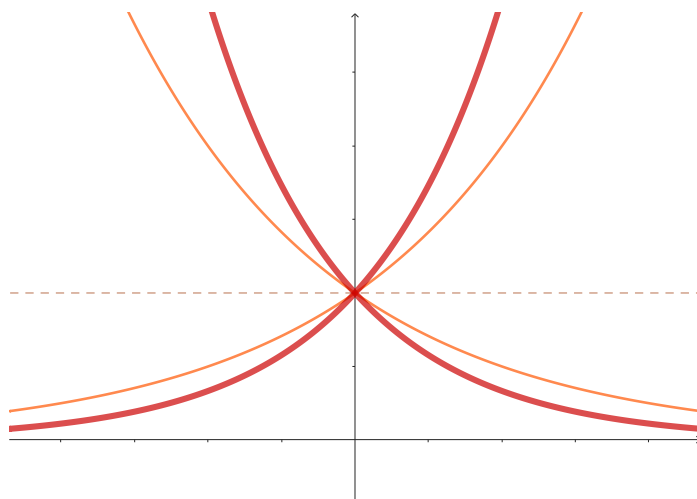


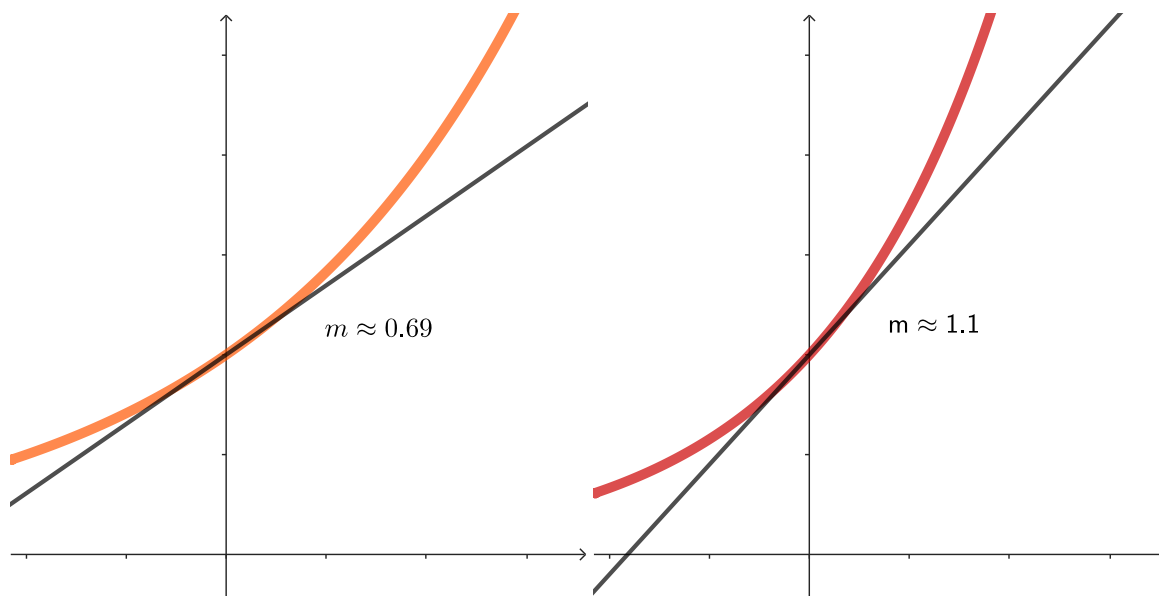
Figura 3: As funções exponenciais a^x com $a = 2, 1/2, 3, 1/3$.

Estude os gráficos. Por causa de 1^x , temos três tipos de função exponencial a^x . Se $0 < a < 1$, a função exponencial decresce; se $a = 1$, a função é constante; se $a > 1$, ela cresce.

Domínio e imagem de a^x . Domínio é toda a linha real. Imagem sempre $(0, \infty)$. (Logo, a função inversa de uma exponencial sempre terá domínio $(0, \infty)$ e imagem sendo a linha real.)

Observe. As funções exponenciais são injetoras. Logo, possuem inversa.

O número e . Observe os gráficos de 2^x e 3^x abaixo.



Os gráficos de 2^x e 3^x sugerem que pode haver um número e que seja a base de uma exponencial e^x cuja tangente em $(0,1)$ tem inclinação *exatamente* 1.

3 A inversa de uma função exponencial

Definição, função logarítmica. Seja $f(x) = a^x = y$. Então a inversa $f^{-1}(y) = x$ exige que x seja o expoente (posto na base a) que resulte em y . Em outras palavras, qual é o expoente na base a que resulta em y ? Esse expoente é x . Logo, a inversa de uma exponencial é uma função que consome um número e produz um expoente.

Notação e terminologia. As funções inversas das exponenciais são chamadas de logarítmicas. A inversa de 2^x é a função logarítmica de base 2. Escreve-se $\log_2(y) = x$.

Observe. A definição implica que logaritmos são expoentes. Portanto, quando se pergunta por um logaritmo, pergunta-se por um expoente. A pergunta — qual o logaritmo de 16 na base 2? — é a mesma pergunta que — qual o expoente da base 2 que resulta em 16?

Escrever o expoente da base 2 que resulta em 16 é escrever

$$2^{\square} = 16 \implies \square = 4.$$

Logo,

$$\log_2 16 = 4 \implies 2^{\log_2 16} = 16,$$

já que a função logarítmica em base 2 é a inversa da função exponencial de base 2. Em símbolos, se $f(x) = 2^x$, então $f^{-1}(y) = \log_2 y$ ou $f^{-1}(x) = \log_2 x$. (Tanto faz o nome da variável independente.)

Propriedades. Uma vez que logaritmos são expoentes, tudo que se aplica a expoentes se aplica a logaritmos. Não é verdade que $a^x a^y = a^{x+y}$? Então é verdade

que

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Exercício. Coloque em palavras. O expoente de um produto (de mesma base) é a soma dos expoentes (de mesma base).

Observe. Não é verdade que $a^x/a^y = a^{x-y}$? Então é verdade que

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

Exercício. Coloque em palavras. Os expoentes de uma divisão (de mesma base) são a subtração dos expoentes (de mesma base).

Observe. Não é verdade que $(a^x)^y = a^{xy}$? Então é verdade que

$$\log_a(x^y) = y \log_a x,$$

sendo y qualquer número real.

Exercício. Coloque em palavras. Um expoente x elevado a y (numa certa base) é o mesmo que uma multiplicação de expoentes.

Exercício. Use as propriedades pra calcular $\log_2 80 - \log_2 5$.

4 O logaritmo natural

Notação. Escreve-se $\ln x$ querendo dizer $\log_e x$.

Observe. Note que $\ln e = 1 = \log_e e$, já que 1 é o expoente da base e que resulta em e , assim como $\log_2 2 = 1$. (Qual é o expoente da base 2 que resulta em 2?)

Fato. Todo logaritmo numa certa base pode ser computado em função de outra base.

Investigue. Seja $y = \log_a x$. Suponha que não saibamos trabalhar com a base a , mas saibamos trabalhar com a base 2. Podemos reescrever $\log_a x$ em função de $\log_2$. Observe que

$$y = \log_a x \implies a^y = x \implies y \log_2 a = \log_2 x \implies y = \frac{\log_2 x}{\log_2 a} = \left(\frac{1}{\log_2 a} \right) \log_2 x.$$

Em resumo, podemos afirmar que

$$y = \log_a x \implies y = \left(\frac{1}{\log_2 a} \right) \log_2 x,$$

o que significa dizer que o logaritmo de x na base a é proporcional ao logaritmo de x na base 2.

Definição, proporcionalidade. Uma quantidade A é proporcional a uma quantidade B se existe um número real $p \neq 0$ tal que $A = pB$.

Exercício. Calcule $\log_8 5$ sabendo que $\ln 5 \approx 1.61$ e que $\ln 8 \approx 2.08$. Você deve obter aproximadamente 0.77.

5 A derivada de uma função exponencial

Seja $f(x) = a^x$. Aplique a definição

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

de derivada e obtenha

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Observe. Quem é a derivada de a^x no ponto $x = 0$? Aplique a definição

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

e obtenha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}.$$

Logo,

$$f'(x) = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = f'(0)a^x.$$

Conclua. A inclinação de uma curva exponencial é proporcional a sua altura. (A constante de proporcionalidade é o número $f'(0)$).