

Máximos, mínimos e concavidade

1 Valores máximos e mínimos

Definição. Uma função f tem valor *máximo absoluto* (ou *máximo global*) em c se $f(c) \geq f(x)$ pra todo $x \in D$, sendo D o domínio de f . O número $f(c)$ é chamado de *valor máximo* de f em D . Similarmente, f tem *mínimo absoluto* em c se $f(c) \leq f(x)$ pra todo $x \in D$ e o número $f(c)$ é chamado de *valor mínimo* de f em D . Valores máximos e mínimos são chamados de *valores extremos* de f .

Definição. Uma função f tem valor *máximo local* (ou *máximo relativo*) em c se $f(c) \geq f(x)$ pra todo x numa vizinhança de c , isto é, pra todo $x \in (a,b)$, sendo $c \in (a,b)$. Similarmente, f tem *mínimo local* em c se $f(c) \leq f(x)$ pra todo x numa vizinhança de c .

Observe que um ponto pode ser máximo global e local ao mesmo tempo. Por exemplo, $\cos(2n\pi) = 1$ é valor máximo global e local da função $\cos x$, sendo n inteiro. Similarmente, $\cos(2n+1)\pi = -1$ é mínimo local e absoluto.

Nem sempre há máximo e mínimo, local ou absoluto. A função

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = x^3$$

não possui mínimo ou máximo, local ou absoluto. Já se definirmos x^3 como

$$[-1,1] \rightarrow \mathbb{R},$$

então ela tem mínimo global em $x = -1$ e máximo global em $x = 1$, mas não tem mínimo local (ou máximo local) porque os locais exigem um intervalo aberto, o que não conseguimos satisfazer para x^3 . Certas propriedades de uma função dependem de seu domínio.

Teorema (do valor extremo). Se f for contínua em um intervalo fechado $[a,b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em certos números $c, d \in [a,b]$.

Valores extremos podem ser plurais. Por exemplo, um gráfico com dois máximos locais e globais de mesma altura mostra dois valores extremos

Investigue as hipóteses do teorema. Se uma função não for contínua, o que acontece? Considere uma função com um ponto aberto onde seria seu máximo.

Exercício 1.1. Desenhe um gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que tenha máximo absoluto, mas não tenha mínimo absoluto.

Exercício 1.2. Desenhe um gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que seja descontínua, mas tenha tanto máximo absoluto como mínimo absoluto.

Teorema 1.1 (de Fermat). Se f tem máximo ou mínimo local em c e se $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.

Note que o teorema não é uma bicondicional. O teorema afirma que se houver máximo ou mínimo local, então a derivada neles é zero. O teorema **não** afirma que derivada zero implica máximo ou mínimo local. Por exemplo, a derivada de x^3 em $x = 0$ é zero, mas o ponto $(0,0)$ não é mínimo ou máximo local de x^3 . (Isso significa que o Teorema de Fermat não nos dá uma estratégia de busca por valores extremos.)

Conheçamos também um exemplo onde a derivada não existe. É o caso de $f(x) = |x|$. A função tem mínimo local e absoluto em $x = 0$, mas esse valor não seria encontrado ao procurarmos por $f'(x) = 0$ porque a derivada em $x = 0$ não existe. É por isso que o Teorema de Fermat usa a conjunção “e se a derivada em c existir”.

O Teorema de Fermat não é tão inútil assim, não. Ele nos informa que procurar por onde a derivada é zero ou onde ela não existe é um bom começo. Devemos olhar esses pontos e procurar responder (por outros meios) se eles são ou não mínimos ou máximos locais e globais. Esses pontos são chamados de *pontos críticos* ou *números críticos*. (Stewart os chama de “números críticos”.)

Definição. Um *número crítico* de uma função f é um número c no domínio de f tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Com o novo termo que ganhamos, podemos reescrever o Teorema de Fermat.

Teorema 1.2 (de Fermat em outras palavras). Se f tiver um máximo ou mínimo local em c , então c é um número crítico.

Em outras palavras, se a derivada é zero em c , então c é crítico; se a derivada não existe em c , então c é crítico. É isso.

Algoritmo pra encontrar valores extremos. Antes de começar, certifique-se de que você tem uma função contínua num intervalo fechado $[a,b]$. **Passo 1.** Encontre os valores de f nos números críticos de f no intervalo aberto (a,b) . **Passo 2.** Encontre os valores de f nas extremidades do intervalo $[a,b]$. **Passo 3.** Compare os valores encontrados nos passos 1 e 2. O maior deles é o máximo absoluto e o menor, mínimo absoluto.

Exercício 1.3. Encontre e explique como encontrar os máximos e mínimos absolutos da função $x^3 - 3x^2 + 1$ em $[-1/2, 4]$.

2 Teorema do Valor Médio

Depois do Teorema Fundamental de Cálculo, o Teorema do Valor Médio é provavelmente o mais importante teorema do cálculo diferencial. Na prova desse teorema, o teorema de Rolle é necessário.

Teorema (de Rolle). Seja f contínua satisfazendo

1. f é contínua em $[a, b]$
2. f é derivável em (a, b)
3. $f(a) = f(b)$.

Então existe número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Intuitivo, não? A função é contínua, tipicamente sobe e desce voltando à mesma altura — tem que ter uma tangente horizontal. Alternativamente, ela desce e sobe voltando à mesma altura — tem que ter uma tangente horizontal. Se não sobe, nem desce, é constante e tem tangente horizontal.

Teorema (do valor médio). Seja f contínua satisfazendo

1. f é contínua em $[a, b]$
2. f é derivável em (a, b) .

Então existe número $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Coloque em palavras. O teorema afirma que existe um ponto $(c, f(c))$ em cuja inclinação da reta tangente é igual a da reta secante que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Palavras alternativas. No intervalo (a, b) , há um ponto $c \in (a, b)$ em que a reta tangente é paralela à reta secante.

Exercício 2.1. É pouco óbvio que o Teorema do Valor Médio forneça certas informações sobre a curva a partir da derivada. Suponha que f seja derivável e contínua em toda a linha real. Suponha também que $f(0) = -3$ e $f'(x) \leq 5$ pra todo x no intervalo de interesse. Quão grande $f(2)$ pode ser?

Visualize a situação. Temos a altura no ponto $x = 0$, que é -3 . A inclinação no intervalo relevante não passa de 5. Isso tem que limitar de alguma forma a altura a que a curva consegue chegar até o ponto $x = 2$: se você quiser a curva mais alta, precisará incliná-la um pouco mais, mas a inclinação está limitada em 5. Aplique o Teorema do Valor Médio no intervalo $[0, 2]$ e veja o que você consegue inferir a partir dele.

Eis uns corolários do Teorema do Valor Médio.

Teorema. Se $f'(x) = 0$ em qualquer $x \in (a,b)$, então f é constante em (a,b) .

Teorema. Se $f'(x) = g'(x)$ pra todo $x \in (a,b)$, então $f - g$ é constante em (a,b) , ou seja, $f(x) = g(x) + c$, sendo c uma constante.

Coloque em palavras. Quando duas funções têm a mesma derivada, elas diferem apenas por uma constante.

Exercício 2.2. Considere a função

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e observe que ela não é constante, mas a derivada dela é zero pra todo x em seu domínio. Ela contradiz o teorema? Explique-se.

Como derivadas afetam a forma de um gráfico?

A derivada $f'(x)$ de uma função $f(x)$ representa a inclinação da curva $f(x)$ no ponto $(x, f(x))$, o que significa que ela informa a direção aonde a curva vai.

Definição. Uma função $f(x)$ é *crescente* num intervalo se $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$ nesse mesmo intervalo. Similarmente, uma função é *decrecente* se $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$ nesse mesmo intervalo.

Teorema. Se $f'(x) > 0$ num intervalo, então $f(x)$ é crescente nesse intervalo. Se $f'(x) < 0$, então f é decrescente nesse intervalo.

Observe que a palavra “intervalo” é importante. Num único ponto, uma função não tem como ser crescente ou decrescente. “Algum tempo precisa passar pra que a função possa crescer (ou decrescer).” (Esse “tempo” é o intervalo.)

Exercício 2.3. Seja $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$. Diga em que pedaços do domínio a função é crescente.

Algoritmo. É preciso fatorar a derivada. Construa uma tabela em que cada linha faz observações sobre os vários fatores da função, ou seja, cada coluna é referente a cada fator. Em cada célula da sua tabela, anote a positividade ou negatividade daquele fator. Infira o sinal da derivada em cada intervalo usando as informações de cada fator. A partir do sinal da derivada, diga se f é crescente ou decrescente em cada intervalo.

Teorema (teste da primeira derivada). Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f .

- (a) Se o sinal de f' mudar de positivo pra negativo em c , então f tem máximo local em c .

- (b) Se o sinal de f' mudar de negativo pra positivo em c , então f tem mínimo local em c .
- (c) Se a derivada não mudar de sinal, então não há nem máximo nem mínimo em c .

Exercício 2.4. Encontre os máximos e mínimos locais da função do Exercício 2.3.

Observe que onde f tem mínimo e máximo, a função se torna côncava pra cima e pra baixo, respectivamente. Observe que no exercício anterior, tivemos que olhar ao redor do ponto c pra saber se há máximo e mínimo. A segunda derivada de f informa o que ocorre com a concavidade da curva sem que tenhamos que olhar ao redor de c .

Definição (a concavidade de uma função). Se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes num certo intervalo, então f é *côncava pra cima* nesse intervalo. Se estiver abaixo de todas as suas tangentes, então f é *côncava pra baixo* nesse intervalo.

Teorema 2.1 (teste da concavidade). Se $f''(x) > 0$ pra todo x num intervalo, f é côncava pra cima nesse intervalo. Similarmente, se $f''(x) < 0$ pra todo x num intervalo, f é côncava pra baixo nesse intervalo.

Se uma função contínua é ora côncava pra baixo e ora côncava pra cima, tem que haver um ponto em que a concavida muda. Esse ponto é chamado de ponto de inflexão.

Definição (ponto de inflexão). Se f é contínua num ponto P e se f mudar de côncava pra cima pra côncava pra baixo (ou *vice-versa*) no ponto P , então P é um *ponto de inflexão*.

Observe que a definição implica imediatamente que a segunda derivada muda de sinal em cada ponto de inflexão que a curva tem.

Teorema (teste da segunda derivada). Suponha que f'' seja contínua numa vizinhança de c .

- (a) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c .
- (b) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c .