

Queda livre

14 de maio de 2023

Introdução. Existe um erro de digitação no problema 3 da prova 1 de Cálculo 1 do período 2 do ano de 2017 da UFRJ. A questão deu a função $A(t) = -(40/10)t^2 + 160$, quando queria dar $A(t) = -(49/10)t^2 + 160$. Obteremos a fórmula da queda livre.

Exercício. Produza a fórmula que descreve a posição de um objeto em queda livre, usando a aceleração da gravidade próximo à superfície terrestre, que é aproximadamente -9.8 m/s^2 .

Solução. O trabalho a ser feito é solucionar uma equação diferencial separável de primeira ordem. A fórmula que obteremos é $y = (1/2)gt^2 + (v_i)t$, sendo g a aceleração da gravidade próximo à superfície terrestre e v_i , a velocidade inicial do objeto em queda livre — desprezando também qualquer resistência do ar *et cetera*.

Suponha que um objeto com velocidade inicial v_i é largado de uma altura y e cai em direção à medida que o tempo t passa. Aceleração é, por definição, a taxa de variação da velocidade. Em símbolos, $g = dv/dt$, uma equação que implica

$$\int dv = \int g dt \iff v = gt + c,$$

sendo c uma constante, um número real qualquer. Então a equação $v = gt + c$ descreve a velocidade do objeto em qualquer tempo t . Em particular, podemos saber que velocidade inicial o objeto tem usando $t = 0$. No tempo $t = 0$, obtemos

$$v_i = g \times 0 + c \iff v_i = c.$$

Logo, a fórmula da velocidade de um objeto em queda livre é

$$v = gt + v_i.$$

Assim como a aceleração, velocidade também é uma taxa de variação, só que a velocidade é uma noção que descreve a taxa de variação do espaço percorrido em função do tempo decorrido. Em símbolos, $v = ds/dt$, sendo ds a variação do espaço percorrido (pelo objeto que está viajando à medida que o tempo passa). Assim como obtemos a velocidade a partir da aceleração, podemos obter uma descrição da posição do objeto a partir da descrição da velocidade: a equação $v = ds/dt$ implica

$$\int ds = \int v dt$$

$$s + c_1 = \frac{gt^2}{2} + (v_i)t + c_2$$

$$s = \frac{gt^2}{2} + (v_i)t + c_3,$$

sendo $c_3 = c_2 - c_1$.

Quem seria a constante c_3 ? Ela tem que a posição inicial do objeto porque no tempo $t = 0$, obtemos $s = c_3$. Similar à velocidade inicial, chamemos a posição inicial de s_i , o que nos dá a descrição

$$s = \frac{gt^2}{2} + (v_i)t + s_i,$$

essencialmente completando nosso objetivo. Pra cumprir com as exigências do exercício, precisamos substituir o valor de g dado no problema, que é 9.8 m/s^2 , o que nos produz a fórmula

$$s = \frac{-9.8t^2}{2} + (v_i)t + s_i$$

$$= -4.9t^2 + (v_i)t + s_i$$

$$= -\frac{49}{10}t^2 + (v_i)t + s_i.$$

Se definirmos que em determinada circunstância, um objeto cai de uma posição inicial $s_i = 160$ metros tendo uma velocidade inicial $v_i = 0$, então a fórmula se torna

$$s = -\frac{49}{10}t^2 + 160.$$

e não $-(40/10)t^2 + 160$. (Eis, portanto, a verdadeira correção para o problema que investigamos na prova 1 de Cálculo 1 do período 2 do ano de 2017. O erro de digitação está no problema e não no gabarito apresentado.) $\square$

Comentário. Assim fica claro de onde vem o número $-49/10$. Ele é metade da aceleração da gravidade no sentido pra baixo, o que indica o uso do sinal negativo. Por que metade? Porque a descrição da posição de um objeto em queda livre utiliza a quantidade $(1/2)gt^2$, que é a metade da aceleração devido à gravidade próximo à superfície do planeta Terra. $\square$

Comentário. Além da solução apresentada no gabarito, existe alguma outra? Existem mais de uma equação que se pode obter com a similaridade de triângulos induzida pelo problema. São todas equivalentes. Por exemplo, em vez dos triângulos utilizados pelo gabarito, pode-se tomar o triângulo (pequeno) superior de altura $160 - A(t)$ e base 10 e o triângulo de altura 160 e base $S(t)$, o que resulta em essencialmente a mesma solução do gabarito.