

A regra da substituição

Introdução

Antes de estudarmos a regra da substituição, recordemos o teorema fundamental e apresentemos o teorema da variação total, que é só mais um segundo nome para a afirmação 2 do teorema fundamental.

A afirmação 1 do teorema fundamental

Recordemos a primeira garantia do teorema fundamental.

Teorema (fundamental, afirmação 1). Se f é contínua em $[a,b]$, então a função

$$g(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

é contínua em $[a,b]$, derivável em (a,b) e $g'(x) = f(x)$, sendo $x \in [a,b]$.

O que diz o resultado? Diz que a derivada de uma função integral é o integrando. Onde está a variável independente dessa função integral? Ela está entre parênteses justapostos a g e também no limite superior da integral. Então, da mesma forma que podemos conceber uma composição de funções como $g(x^2 + 1)$, podemos escrever

$$h(x^2 + 1) = \int_a^{x^2+1} f(t) \, dt$$

e pedir pela derivada de h .

Exercício. Compute a derivada de

$$\int_{17}^{1/x} \operatorname{tg}^{-1} t \, dt.$$

O teorema da variação total

A segunda garantia do teorema fundamental é também chamada de **teorema da variação total**. Façamos uma reescrita da segunda garantia pra compreendermos a perspectiva “da variação total” e entender por que se chama assim. Eis o teorema como o escrevemos antes.

Teorema (fundamental, afirmação 2). Se f é contínua em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(t) \, dt = F(b) - F(a),$$

sendo F qualquer primitiva de f , ou seja, qualquer função F tal que $F'(x) = f(x)$.

Observe que F é uma primitiva de f , ou seja, $F' = f$. Podemos então reescrever a segunda garantia sem usar f em qualquer lugar e obtemos o teorema da variação total. Eis a nova redação.

Teorema (da variação total). Se f é contínua em $[a,b]$, então

$$\int_a^b F'(t) \, dt = F(b) - F(a).$$

O que diz o teorema da variação total? Ele diz que se você tem a velocidade de alguma coisa — a taxa de variação de alguma coisa —, então a primitiva dessa coisa revela o quanto essa coisa variou. Precisamos de exemplos.

Suponha que lhe seja dada uma fórmula dn/dt representando a taxa de crescimento de uma população num período de tempo especificado pelo intervalo $[t_1, t_2]$. Em outras palavras, sabemos o quão rápido essa população cresce ou decai nesse tempo. Se nos é perguntado como a população variou nesse intervalo de tempo, a resposta é dada pelo teorema da variação total. Pra usá-lo, precisamos conhecer uma primitiva de dn/dt , que é $n(t)$. Logo, a população variou

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dn}{dt} \, dt = n(t_2) - n(t_1)$$

Outro exemplo. Se um objeto se move ao longo de uma reta com função posição $s(t)$, então sua velocidade é $v(t) = s'(t)$ e, logo, seu deslocamento é

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t) \, dt = s(t_2) - s(t_1),$$

que é a variação total no deslocamento do objeto. Mas o que significa a variação total no deslocamento do objeto? Não significa a distância percorrida. Considere a situação em que um objeto se move numa direção, mas depois para e retrocede. Isso significa que $v(t)$ troca de sinal e, logo, a integral de $v(t)$ representa uma diferença de áreas. Se desejarmos pela distância percorrida, precisamos calcular

$$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)| \, dt,$$

o que pode ser feito descobrindo os pontos do intervalo em que a função $v(t)$ troca de sinal e integrar cada trecho, tomando-se apenas o valor absoluto da área de cada trecho.

Exercício (questão 5 da participação em atividades). O termo “custo marginal” se refere a como o custo de produzir uma coisa se modifica se exigirmos que mais uma unidade seja produzida (além do que já é produzido). Suponha que você produza um objeto de arte, feito à mão, trabalhoso. Você cobra um preço por ele. Se o cliente lhe pedir dois objetos num dia só, você cobra o segundo mais caro. O custo marginal é o preço a mais que ele paga por esse “mais um objeto” que ele pede num mesmo dia.

A palavra “margem” se refere à extremidade de uma coisa. Se alinharmos os objetos que você produz numa linha representando o tempo, esse “mais um objeto” aparece sempre na margem da direita. O custo a mais incorrido por pedir mais um objeto é uma medida de quanto o preço sobe (ou cai) em decorrência de se pedir “mais um objeto” — é o custo marginal.

Se o custo marginal de se produzir um objeto é determinado pela fórmula

$$C'(x) = 2x + 20,$$

sendo x uma variável representando a quantidade de objetos produzidos num dia, qual é o lucro diário sabendo que cada objeto vale 100 reais e há sempre um custo fixo de 700 reais?

Observe que se pede o lucro e o que se dá é o custo marginal. Como se pede o lucro, precisamos ter como calcular o faturamento bem como o custo, já que o lucro é o faturamento menos o custo. Então faça: (a) encontre uma fórmula que represente o faturamento da empresa ao vender x unidades; (b) encontre uma fórmula que represente o custo de se produzir x unidades, levando os 700 reais fixos em consideração; (c) expresse o lucro líquido usando (a) e (b).

Exercício (questão 6 da participação em atividades). Contadores medem o decaimento do valor de um bem de uma empresa. A Receita Federal, por exemplo, considera que a vida útil de um carro é de cinco anos, então uma prática é considerar que um carro perde 20% do seu valor a cada ano e, assim, cinco anos depois ele não vale mais nada. A taxa de depreciação aí é constante em 20%, ou seja, $dV/dt = 20\% = 0.2$

O exercício da participação em atividades diz que um certo bem tem seu valor variado a uma taxa de

$$\frac{dV}{dt} = 3000t - 16000.$$

É uma variação mais complicada: depende do ponto em que estamos na linha do tempo. Se perguntamos — qual a depreciação nos primeiros três anos? —, estamos perguntando o quanto o bem caiu de valor no intervalo $[0, 3]$. Se perguntamos — qual a depreciação no terceiro ano? —, estamos perguntando o quanto o bem caiu de valor no intervalo $[2, 3]$.

Antes de responder — aplicando o teorema da variação total —, desenhe a linha do tempo e localize que trecho representa o primeiro, segundo e o terceiro ano de uso da máquina.

A regra da substituição

O teorema fundamental, em sua afirmação 1, nos ensina que integrar uma função é encontrar uma primitiva dela, ou seja, integrar é encontrar uma função cuja derivada é o integrando. Isso significa que podemos produzir uma nova regra de integração meramente computando a derivada de uma certa função (ou de uma família de funções) e então arquivar o par de funções em nosso catálogo de integrais. Por exemplo, computando a derivada de $(x^2 + x)^2$, usando a regra da cadeia, obtemos $2(x^2 + x)(2x + 1)$, o que nos dá a regra de que

$$\int 2(x^2 + x)(2x + 1) \, dx = (x^2 + x)^2 + c.$$

Usamos a regra da cadeia. A função $(x^2 + x)^2$ é a composição de $g(x) = x^2 + x$ com $f(x) = x^2$, ou seja, $f(g(x)) = (x^2 + x)^2$. De uma forma geral, a derivada de $f(g(x))$ é $f'(g(x))g'(x)$, o que nos dá a regra

$$\int f'(g(x))g'(x) \, dx = f(g(x)) + c.$$

Em outras palavras, toda regra de derivação produz uma regra de integração. A regra da substituição é a regra de integração produzida pela regra da cadeia. Ser um especialista em usar a regra da substituição significa ser um especialista em detectar possibilidades de escrever o integrando na forma $f'(g(x))g'(x)$ porque, assim, a integral é $f(g(x)) + c$.

Suponha que queiramos computar

$$\int 2(x^2 + x)(2x + 1) \, dx.$$

Como faríamos? Se suspeitamos que a regra da cadeia pode ser usada aqui, então precisamos pedir aos nossos olhos que procure expressar o integrando na forma $f'(g(x))g'(x)$. Na integral acima, como já sabemos qual é a resposta, é fácil ver que o fator $2x + 1$ é a derivada da função $x^2 + x$. É fácil também lembrar que aquele fator 2 multiplicando o integrando na esquerda era a potência da função $(x^2 + x)^2$, que derivamos.

Por que a regra se chama “da substituição”? Seja $u(x) = x^2 + x$. A derivada de $u(x)$ é $du/dx = 2x + 1$. Se substituirmos u e du/dx na integral, obtemos

$$\int 2u \frac{du}{dx} dx = \int 2u \, du = 2 \frac{u^2}{2} + c = u^2 + c = (x^2 + x)^2 + c,$$

como desejado. Em outras palavras, a regra da substituição é uma forma de reescrever o integrando — uma mudança de variável — de forma que consigamos desfazer o que a regra da cadeia fez.

Teorema (da substituição). Se $u = g(x)$ é uma função derivável cuja imagem é um intervalo I e f for contínua em I , então

$$\int f(g(x))g'(x) \, dx = \int f(u) \, du.$$

Exercício. Computemos juntos

$$\int (x^2 - 3)^3 2x \, dx.$$

Solução. Estamos procurando por um integrando na forma $f(g(x))g'(x)$. Experimentando $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2 - 3$, obtemos a derivada de g , que é $g'(x) = 2x$ e observamos que $g'(x)$ casa com o fator $2x$ à esquerda de dx . Assim, encontramos

$$f(g(x))g'(x) = f(x^2 - 3)2x = (x^2 - 3)^3 2x.$$

Logo, se declaramos uma nova variável $u = g(x) = x^2 - 3$, então $du = 2x \, dx$ e obtemos

$$\int (x^2 - 3)^3 2x \, dx = \int u^3 \, du = \frac{u^4}{4} + c = \frac{1}{4}(x^2 - 3)^4 + c,$$

como desejado.

Uma estratégia pra usar a regra da substituição. (1) Observe o integrando e procure escolher uma parte do integrando que tome o lugar de uma função $g(x)$. Sua escolha de $g(x)$ precisa ser tal que a derivada $g'(x)$ também apareça no integrando. (2) Em seguida, substitua $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$ no integrando. (3) Se sua escolha foi boa, você vai conseguir terminar a integração. Se a escolha não foi boa, olhe novamente e veja se há alternativas promissoras. (4) Compute a integral com respeito a u . (5) Escreva os resultados em termos de x , ou seja, substitua u por $g(x)$ de volta.

Lembre-se que a regra da substituição não vai resolver todas as integrais, então é preciso também reconhecer quando desistir e procurar por outras formas de integrar.

Às vezes é preciso ajustar uma constante

Tentemos usar a regra da substituição pra encontrar a primitiva de $x\sqrt{x^2 - 5}$. Em outras palavras, queremos

$$\int x\sqrt{x^2 - 5} \, dx = \int (x^2 - 5)^{1/2} x \, dx.$$

Experimentemos $u = x^2 - 5$ e $du = 2x \, dx$. O integrando possui $x \, dx$ e não $2x \, dx$, o que nos impede de continuar. Se escrevermos

$$\int (x^2 - 5)^{1/2} x \, dx = \int u^{1/2} \, du, \quad \text{— incorreto!}$$

o que obtemos é o dobro do resultado porque, assim, efetivamente inserimos um fator de 2 que não deveria estar lá. Por outro lado, se é esse o problema, podemos corrigir a coisa multiplicando a integral por $1/2$, ou seja,

$$\int (x^2 - 5)^{1/2} x \, dx = \frac{1}{2} \int u^{1/2} \, du.$$

Agora estamos na posição de apreciar a notação dy/dx de Leibniz. A forma como fazemos pra ajustar essa constante é trabalhando com os diferenciais. Veja como. Experimentamos $u = x^2 - 5$ e obtivemos $du = 2x \, dx$. Observe que agora que se $du = 2x \, dx$, então

$$dx = \frac{du}{2x}.$$

Logo,

$$\int x\sqrt{x^2-5} \, dx = \int (x^2-5)^{1/2} x \, dx = \int u^{1/2} \cancel{x} \frac{du}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2} \int u^{1/2} \, du.$$

Integrando e substituindo de volta, obtemos

$$\frac{1}{2} \int u^{1/2} \, du = \frac{1}{2} \frac{u^{3/2}}{3/2} + c = \frac{1}{3} (x^2-5)^{3/2} + c.$$

Derivando a integral pra confirmar o resultado, obtemos

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{3} (x^2-5)^{3/2} + c = \frac{1}{2} (x^2-5)^{1/2} \cdot 2x = \frac{1}{2} \sqrt{x^2-5} \cdot 2x = x\sqrt{x^2-5},$$

como desejado.

Preocupado com o fato de que estamos manipulando o dx ?

Anteriormente, dissemos que o dx de uma integral era só um ornamento sintático, o que é verdadeiro. Observe que não precisamos manipulá-lo como se um objeto matemático fosse. Foi assim que computamos a integral acima. Recorde-se de que fizemos a substituição de $x^2 - 5$ por u , mas com isso encontramos o dobro da integral que queríamos. Então partimos a integral na metade pra obter o resultado desejado. Não manipulamos o dx . Meramente usamos o raciocínio.

Entretanto, manipular o dx como se ele fosse um objeto matemático é um jeito de chegar aonde queremos sem ter que encubir a mente a entender o que está acontecendo. É mais fácil operar a álgebra de forma automática do que prestar atenção no que estamos fazendo. É por razões como essa que a notação dy/dx de Leibniz é tão celebrada.

[É] permitido operar com dx e com du após os símbolos de integração como se diferenciais eles fossem. — James Stewart, seção 5.5, sexta edição.

Às vezes é preciso ajustar mais que uma constante

Considere computar

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}} \, dx.$$

Se declararmos $u = x - 1$, então $du = dx$. Mas isso não nos permite eliminar x no numerador do integrando e assim ficamos com

$$\int \frac{x}{\sqrt{u}} du$$

e não podemos continuar. Pra usar a regra da substituição, precisamos sempre escrever o integrando completamente com respeito à nova variável, que é u aqui. Mas observe que se $u = x - 1$, então $u + 1 = x$ e logo

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx &= \int \frac{u+1}{\sqrt{u}} du \\ &= \int (u+1)u^{-1/2} du = \int u^{1/2} + u^{-1/2} du \\ &= \frac{2}{3}u^{3/2} + 2u^{1/2} + c \\ &= \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + 2(x-1)^{1/2} + c, \end{aligned}$$

como desejado.