

A derivada de funções trigonométricas

1 Introdução

Trigonometria é o estudo da medição de triângulos. *Trigon* é grego antigo que significa “triângulo”. *Metria* significa medição. Então, literalmente, trigonometria se interessa(va) por fazer medições em triângulos, assim como geometria se interessa(va) por fazer medições na terra (*geo* representa a palavra “terra”, de origem bem antiga e desconhecida).

Science, we are often taught, is measurement. (David Salsburg. *The Lady Tasting Tea: how statistics revolutionized science in the twentieth century.* W. H. Freedom e Company, New York, 2001. ISBN: 0-7167-4106-7. Capítulo 2, página 14.)

Os nomes são antigos. Trigonometria deu origem às funções $\sin(x)$ e $\cos(x)$, por exemplo, cujo propósito inicial era fazer medições em triângulos, mas eventualmente percebeu-se que elas eram ferramentas indispensáveis ao estudo de fenômenos que se repetem, isto é, fenômenos periódicos. Tantas coisas na natureza são periódicas.

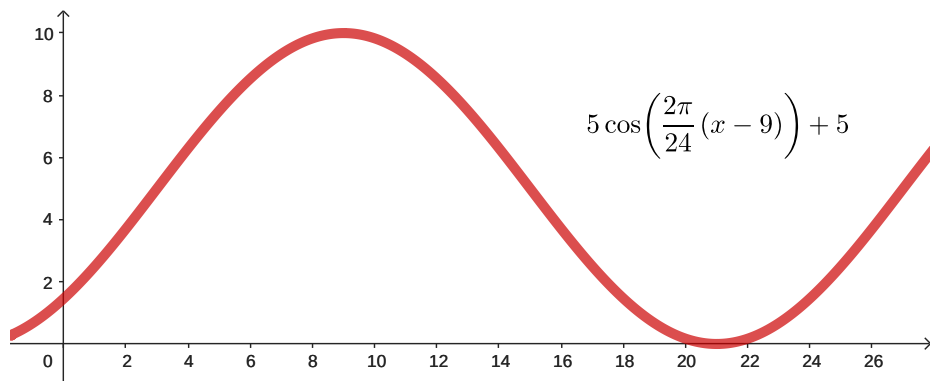


Figura 1: Uma pessoa que acorda à 9h com um máximo de energia e dorme às 21h com um mínimo de energia.

Acordamos mais ou menos num mesmo horário, talvez com um máximo de disposição física, que diminui ao longo do dia até que eventualmente dormimos, recuperando energia, acordando novamente e reiniciando esse ciclo. Suponha que você acorde às 9h e se sinta com um máximo de energia lá — energia nível 10, digamos. Suponha

que você durma às 21h, quando você diria que seu nível de energia é zero. Com o que nos ensina James Stewart na seção 1.3, podemos modelar seu nível de energia com a função

$$5 \cos \left(\frac{2\pi}{24}(x - 9) \right) + 5,$$

que é a função $\cos(x)$ esticada verticalmente por um fator de $10/2$, deslocada pra cima em $10/2$ unidades, deslocada pra direita em 9 unidades e alterada pra que seu período — que é 2π — agora seja distribuído em 24 horas. (Veja a Figura 1.)

2 As palavras “seno” e “cosseno”

Parece que a palavra “seno” origina-se em uma má tradução de grego antigo para a língua árabe antiga. Eventualmente apareceu em Latim sob a ortografia de *sinus* e foi traduzida para o inglês como *sine*. Devemos tomar “seno” como primitiva, então, já que não há boas razões em sua etimologia. Já “cosseno” vem do fato de que o seno do complemento de um ângulo é exatamente o cosseno do ângulo, ou seja, o “co” de cosseno vem de “complemento do seno”. Por exemplo, o seno de 30 graus é $1/2$. O complemento de 30 graus é 60 graus. Logo, o cosseno de 60 graus é $1/2$.

3 A transcendentalidade das funções

As funções trigonométricas são chamadas de funções transcendentais, o que significa que raízes, potências, soma, subtração, multiplicação e divisão não são capazes de expressá-las de forma finita. Se $\sin(x)$, $\cos(x)$ fossem máquinas e pudéssemos abri-las pra ver o que tem dentro, não encontraríamos uma quantidade finita de raízes, potências e aritmética. A situação é mais simples com funções como

$$r(a, b, c) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

porque a fórmula aí se resume a aritmética, potências e raízes. Essa é a razão por que exercícios sempre usam os mesmos ângulos — como 30, 60, 90 graus e os outros. Construímos a seguir as imagens desses ângulos populares.

4 Ângulos

Medição é objetivo central da ciência. Como medir as aberturas decorrentes da interseção entre retas? Note, por exemplo, que quando duas retas se cruzam, temos dois pares de aberturas resultantes, cada par de um tamanho diferente. O problema já começa aí — de qual abertura estamos falando? Quanto mais abrimos um desses pares, menor fica o outro. Se abirmos demais — percorrendo os 180 graus — as retas se fundem em uma reta só. Se continuarmos, percorremos os 360 graus, fechando

um círculo. O comprimento dessa circunferência é 2π , o que se equipara aos 360 graus. Se assumirmos que a relação entre graus e radianos é linear, então usamos proporcionalidade pra converter de graus pra radianos e vice-versa.

Por exemplo, se 2π se equipara a 360 graus, quantos radianos seriam 180 graus? Seja x o valor que representa esses 180 graus (em radianos). Por serem proporcionais, sendo p a constante de proporcionalidade, então

$$\frac{2\pi}{360} = p = \frac{x}{180}.$$

Observe que nem precisamos saber quem é p pra descobrir x . Multiplicamos ambas frações por 180 e obtemos $\pi = x$. De uma forma geral, se desejamos converter n graus pra radianos, computamos

$$\frac{2\pi}{360} = \frac{x}{n} \implies x = n \frac{\pi}{180}.$$

Interprete o resultado. O número n é multiplicado por $\pi/180$, sendo que $\pi/180$ é um número próximo de zero, já que 180 é bem maior que π , ou seja, obtemos resultado menor que n . Por exemplo, 90 graus é convertido pra aproximadamente 1.57. Graus são grandes, radianos são pequenos.

Compute também uma fórmula para conversão de radianos pra graus. Dessa vez chame de n a medida exata em radianos e chame de x a quantidade em graus que se deseja e compute:

$$\frac{2\pi}{360} = \frac{n}{x} \implies x = \frac{180}{\pi} n.$$

Interprete o resultado. O número $180/\pi$ é um número “grande”, aproximadamente 57.30. Isso significa que 1 radiano é quase 60 graus.

5 Uma tabela de ângulos populares

“Antes de começar [...], talvez você precise revisar as funções trigonométricas. [...] Uma revisão das funções trigonométricas é dada no Apêndice D.” – James Stewart, seção 3.3, sexta edição.

Os ângulos populares são 0, 30, 45, 90, 120, 135, 150, 180, 270, 360 graus, ou seja, 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/3$, $3\pi/4$, $5\pi/6$, π , $3\pi/2$, 2π . As razões trigonométricas desses ângulos são todas obtidas a partir de dois triângulos, fáceis de lembrar.

O primeiro triângulo importante é o equilátero de lado 1. Ele tem três ângulos internos de 60 graus, o que é $\pi/3$. Se bisectarmos um desses ângulos, obteremos dois ângulos de $\pi/6$. A biseção divide o lado oposto em duas partes iguais de tamanho $1/2$. Logo, a altura do triângulo satisfaz $1^2 = 1 = 1/4 + h^2$, sendo h a altura. Daí $h = \sqrt{3}/2$, implicando $\sin \pi/6 = 1/2$ e $\sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$.

O segundo triângulo retângulo importante é o isósceles de catetos com comprimento 1. A hipotenusa então tem tamanho $\sqrt{2}$. Os ângulos agudos então têm tamanhos iguais e somam $\pi/2$, logo cada um deles tem tamanho $\pi/4$. Daí $\sin \pi/4 = 1/\sqrt{2}$.

Com esses dois triângulos, conseguimos as relações trigonométricas de todos os ângulos populares. Para os ângulos obtusos — os maiores que 90 graus —, é preciso calcular as relações trigonométricas deles a partir do ângulo de referência relativo a eles. É um fato que o seno de $2\pi/3$, ângulo de tamanho 120 graus, tem a mesma *magnitude* que o seno de $\pi/3$, ou seja, $|\sin 2\pi/3| = \sin \pi/3$. (Por isso dizemos que $\pi/3$ é o ângulo de referência relativo a $2\pi/3$.) Logo, basta saber qual é sinal do seno de $2\pi/3$ pra deduzirmos $\sin 2\pi/3$.

Definição. Relativo a um dado ângulo, o *ângulo de referência* é o menor ângulo agudo que se pode formar (com o eixo x) e, por definição, ele é sempre positivo em $[0, \pi/2]$.

Os sinais podem ser observados olhando-se os gráficos das funções seno e cosseno. Stewart nos conta que a frase “*All Students Take Calculus*” nos ajuda a lembrar em que quadrantes as funções trigonométricas são positivas. No primeiro quadrante, todas são. No segundo, só Seno. No terceiro, só Tangente. No quarto, só Cosseno. Como $2\pi/3$ está no segundo quadrante, então seu sinal é positivo, logo $\sin 2\pi/3 = \sqrt{3}/2$. Similarmente, obtemos $\sin 3\pi/4 = 1/\sqrt{2}$, $\sin 5\pi/6 = 1/2$, $\sin \pi = 0$, $\sin 3\pi/2 = -1$, $\sin 2\pi = 0$. Assim construímos a Tabela 1.

graus	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270
rad	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$3\pi/2$
sin	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	-1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	$-1/2$	$-1/\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}/2$	-1	0
tg	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	ind	$-\sqrt{3}$	-1	$-1/\sqrt{3}$	0	ind
csc	ind	2	$\sqrt{2}$	$2/\sqrt{3}$	1	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	ind	-1
sec	1	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	ind	-2	$-\sqrt{2}$	$-2/\sqrt{3}$	-1	ind
ctg	ind	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	ind	$-1/\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	ind	ind

Tabela 1: As razões trigonométricas para os ângulos fáceis de calcular. O símbolo “ind” representa a palavra “indefinido”, quando a razão trigonométrica não existe.

6 O tamanho de um arco em função do ângulo

Se assumirmos que o ângulo de um setor do círculo é proporcional ao arco, então podemos encontrar a constante de proporcionalidade usando medidas que já conhecemos. Se, por exemplo, alongarmos o arco até fechar o círculo, então obtemos a circunferência, que é $2\pi r$. O ângulo que fecha o círculo é 2π . Logo, se temos um

ângulo de comprimento θ radianos, o arco a satisfaz

$$\frac{2\pi r}{2\pi} = \frac{a}{\theta} \quad \text{implicando} \quad a = \theta r.$$

Mas lembre-se de que assumimos a proporcionalidade em vez de prová-la.

7 Identidades trigonométricas

Há uma série de identidades trigonométricas. Elas são úteis, por exemplo, pra computar formalmente a derivada de uma função trigonométrica como a derivada de $\text{sen}(x)$.

Aplicando a definição de sen e cos no círculo unitário e usando o Teorema de Pitágoras, obtemos $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$. Se dividirmos ambos os lados da equação por $\text{cos}^2 x$, obtemos

$$\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x.$$

Se, em vez disso, dividirmos por $\text{sen}^2 x$, obtemos

$$1 + \text{ctg}^2 x = \csc^2 x.$$

A função $\text{sen } x$ é ímpar e $\text{cos } x$ é par, o que significa dizer $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$ e $\text{cos}(-x) = \text{cos } x$. O período de ambas é 2π . Logo, $\text{sen}(x+2\pi) = \text{sen } x$ e $\text{cos}(x+2\pi) = \text{cos } x$.

Stewart afirma que todas as identidades que podem aparecer pelo livro podem ser obtidas das *fórmulas da adição*, que são

$$\begin{aligned}\text{sen}(x+y) &= \text{sen } x \text{cos } y + \text{cos } x \text{sen } y \\ \text{cos}(x+y) &= \text{cos } x \text{cos } y - \text{sen } x \text{sen } y.\end{aligned}$$

Por exemplo, colocando $x = y$ nelas, obtemos as *fórmulas dos ângulos duplos*

$$\begin{aligned}\text{sen}(2x) &= 2 \text{sen } x \text{cos } x \\ \text{cos}(2x) &= \text{cos}^2 x - \text{sen}^2 x.\end{aligned}$$

Sendo assim, contentemo-nos em conhecer as fórmulas da adição e paramos por aqui, já que hoje estamos interessados na derivada de $\text{sen}(x)$, $\text{cos}(x)$ e $\text{tg}(x)$.

8 A derivada do seno

Veja o gráfico da função seno na Figura 2 e observe onde ele tem tangentes horizontais. Agora observe o gráfico da função cosseno, notando que é exatamente onde a função cosseno tem valor zero que a função seno tem suas tangentes horizontais. Não é coincidência.

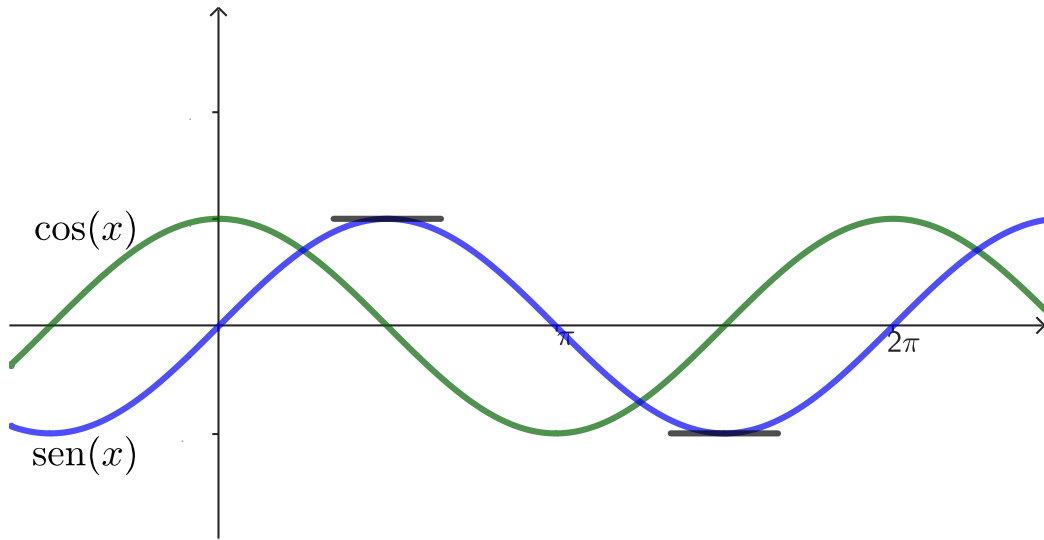


Figura 2: A derivada do seno.

Aplicando a definição de derivada à função $\text{sen}(x)$, obtemos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h}.$$

Agora use a fórmula da adição do seno no termo $\text{sen}(x+h)$, que é

$$\text{sen}(x+h) = \text{sen}(x)\cos(h) + \cos(x)\text{sen}(h)$$

e obtenha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)\cos(h) + \cos(x)\text{sen}(h) - \text{sen}(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)\cos(h) - \text{sen}(x) + \cos(x)\text{sen}(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sen}(x)\cos(h) - \text{sen}(x)}{h} + \frac{\cos(x)\text{sen}(h)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\text{sen}(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \frac{\text{sen}(h)}{h} \right) \\ &= \text{sen}(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h}, \end{aligned}$$

assumindo que os limites existam — e eles existem.

É um fato que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} = 1 \tag{1}$$

e, a partir desse resultado, pode-se provar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0. \tag{2}$$

Assim,

$$\text{sen}'(x) = \text{sen}(x) \lim \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \lim \frac{\text{sen}(h)}{h} = \cos(x).$$

A derivada do seno, portanto, depende dos dois limites acima. Stewart prova a Equação 1 na seção 3.3 usando um argumento geométrico e fazendo também uso do Teorema do Confronto, que não estudamos ainda. Precisamos, portanto, de um caminho mais fácil, pagando o preço pela falta de rigor.

Por que

$$\frac{\text{sen}(h)}{h} \rightarrow 1$$

à medida que $h \rightarrow 0$? Observe o gráfico de $\text{sen}(x)$ ao redor de zero. Não é parecido com $y = x$? Ao redor de zero, podemos substituir a função $\text{sen}(x)$ pela função x . Por isso esse limite é 1.

Pra obtermos

$$\lim \frac{\cos(h) - 1}{h},$$

basta multiplicarmos a fração por $(\cos(h) + 1)/(\cos(h) + 1)$ e manipular a expressão resultante, obtendo

$$\lim \frac{\cos(h) - 1}{h} = \lim \frac{\cos^2(h) - 1}{h(\cos(h) + 1)}.$$

Daí, dado que $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$, então $\cos^2(x) - 1 = -\text{sen}^2(x)$. Logo,

$$\begin{aligned} \lim \frac{\cos(h) - 1}{h} &= \lim \frac{-\text{sen}^2(h)}{h(\cos(h) + 1)} \\ &= -\lim \frac{\text{sen}(h)}{h} \lim \frac{\text{sen}(h)}{\cos(h) + 1} \\ &= -\lim 1 \lim \frac{0}{1 + 1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

provando assim a Equação 2, finalizado nosso argumento de que a derivada do seno é a função cosseno.

9 A derivada do cosseno

Como fizemos com seno, observemos o gráfico primeiro. Repare que $\text{sen}(x)$ é zero exatamente onde $\cos(x)$ tem tangentes verticais. Mas, diferente do gráfico anterior, quando a curva $\cos(x)$ desce, a função $\text{sen}(x)$ é positiva; quando $\cos(x)$ sobe, a curva $\text{sen}(x)$ é negativa. Portanto, a derivada de $\cos(x)$ não é $\text{sen}(x)$, mas sim $-\text{sen}(x)$. Com os limites que usamos acima, podemos obter a derivada do cosseno também.

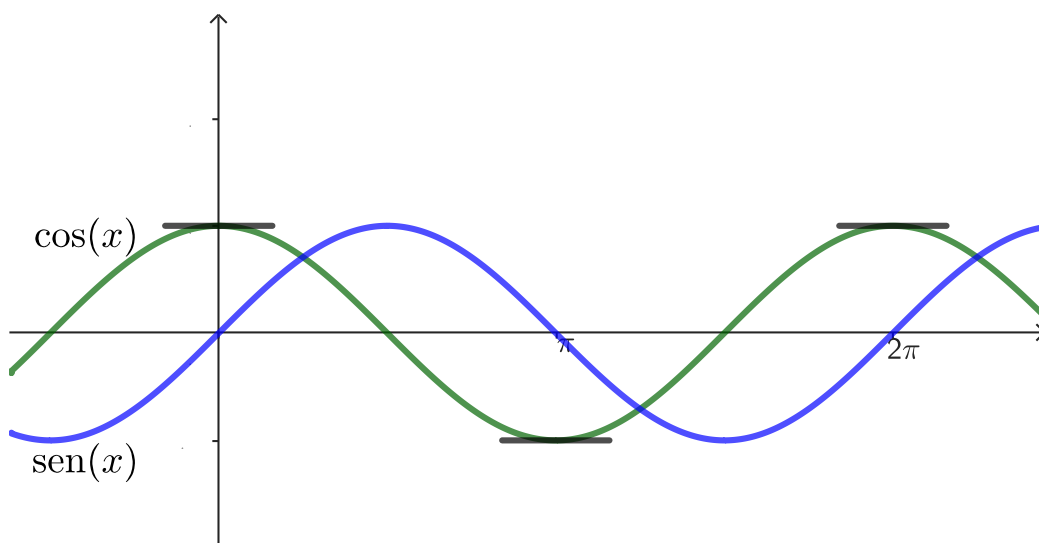


Figura 3: A derivada do cosseno.

Aplicamos a definição de derivada, a fórmula da adição do cosseno, que é

$$\cos(x + h) = \cos(x) \cos(h) - \sin(x) \sin(h),$$

e obtemos

$$\begin{aligned} \cos'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x + h) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \cos(h) - \sin(x) \sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \cos(h) - \cos(x) - \sin(x) \sin(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1) - \sin(x) \sin(h)}{h} \\ &= \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \\ &= -\sin(x), \end{aligned}$$

como esperávamos.

Exercício. A derivada de $\operatorname{tg}(x)$ pode ser obtida pela regra do quociente. Aplique a regra do quociente, use o fato de que $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, obtendo

$$\operatorname{tg}'(x) = 1/\cos^2(x) = \sec^2(x).$$

“Lembre-se de que [as derivadas das funções trigonométricas bem como as próprias funções trigonométricas] são válidas apenas quando x estiver medido em radianos.” – James Stewart, seção 3.3, sexta edição.